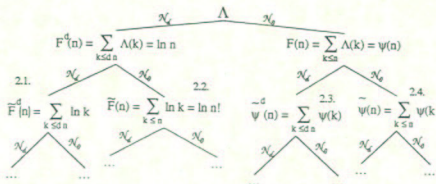


ASUPRA UNOR NOI FUNCȚII ÎN TEORIA NUMERELOR



UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

CATEDRA DE ALGEBRĂ

FLORENTIN SMARANDACHE

ASUPRA UNOR NOI FUNCȚII
ÎN
TEORIA NUMERELOR

Chișinău - 1999

Prof. Florentin Smarandache
University of New Mexico
Gallup, NM 87301, USA
Fax: (505) 863-7532 (Attn. Dr. Smarandache)
E-mail: smarand@unm.edu
URL: <http://www/gallup.unm.edu/~smarandache/>

Diagrama de pe coperta I reprezintă funcția zeta a lui Riemann (p. 49).

Iar tabelul de pe coperta IV reprezintă funcția S ca funcție sumatoare (p. 61).

© U.S.M. - 1999

Secția poligrafie operativă
a U.S.M. 2009, Chișinău,
Str. A.Mateevici, 60

Mamei mele

ASUPRA UNOR NOI FUNCTII IN TEORIA NUMERELOR

Introducere

Performantele matematicii actuale, ca si descoperirile din viitor isi au, desigur, inceputul in cea mai veche si mai aproape de filozofie ramura a matematicii, in teoria numerelor.

Matematicienii din toate timpurile au fost, sunt si vor fi atrasi de frumusetea si varietatea problemelor specifice acestei ramuri a matematicii.

Regina a matematicii, care la randul ei este regina a stiintelor, dupa cum spunea Gauss, teoria numerelor straluceste cu lumina si atractiile ei, fascinandu-ne si usurandu-ne drumul cunoasterii legitatilor ce guverneaza macrocosmosul si microcosmosul.

De la etapa antichitatii, cand teoria numerelor era cuprinsa in aritmetica, la etapa aritmeticii superioare din perioada Renasterii, cand teoria numerelor a devenit parte de sine statatoare si ajungand la etapa moderna din secolele XIX si XX, cand in teoria numerelor isi fac loc metode de cercetare din domenii vecine, ca teoria functiilor de variabila complexa si analiza matematicii drumul este lung, insa dens, cu rezultate surprinzatoare, ingenioase si culte nu numai teoriei propriuzise a numerelor, dar si altor domenii ale cunoasterii, atat teoretice cat si practice.

In lucrarea aceasta, (capitolul II si III), plecand de la o functie numerica specifica teoriei elementare a numerelor

$$S : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

$S(n)$ este cel mai mic numar natural al carui factorial este divizibil cu n , prezentam proprietati si legaturi ale acestei functii numerice

clasice, dar proprietati asimptotice specifice teoriei analitice a numerelor .

Sunt de asemenea prezentate generalizarea lui S la multimea Q^* a numerelor rationale nenule, ca si alte functii, obtinute prin analogie cu definitia lui S .

Capitolul I este dedicat unor probleme diverse, tinute de autor in special in domeniul teoriei congruentelor.

Interesul international de care se bucura functiile S si diversele ei generalizari ne bucura si constituie un motiv pentru care am introdus in aceasta lucrare si prezentarea unora dintre ele.

Tin sa multumesc in special domnului profesor Vasile Seleacu, de la Universitatea din Craiova, cu care am deprins dragostea de aritmetica si teoria numerelor , dar multumesc de asemenea tuturor celor care ,pe parcursul anilor au contribuit la formarea mea matematica.

Multumesc de asemenea parintilor mei, care m-au indemnat spre invatatura ,m-au ajutat si ma ajuta spre acest drum minunat.

AUTORUL
(iunie 1995)

Capitolul 1

GENERALIZAREA UNOR TEOREME DE CONGRUENȚĂ

1.1. Noțiuni introductive

Fie m un număr întreg și pozitiv, pe care îl vom numi *modul*. Cu ajutorul lui se introduce în mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi o relație binară, numită *de congruență* și notată prin \equiv , astfel:

1.1.1. Definiție. Numerele întregi a și b sunt congruente față de modulul m dacăși numai dacă m divide diferența $a - b$.

Avem deci

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b = km, \text{ unde } k \in \mathbb{Z} \text{ (1.1.1.)}$$

1.1.2. Consecință: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a$ și b dau, prin împărțire la m , același rest.

Se știe că relația de congruență definită la (1.1.1.) este o relație de echivalență (este reflexivă, simetrică și tranzitivă). Ea mai are însă și următoarele proprietăți remarcabile:

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \text{ și } a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \Rightarrow$$

$$(i) \ a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$$

$$(ii) \ a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod{m}$$

$$(iii) \ a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$$

Mai general, dacă $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, pentru $i = 1, 2, \dots, n$, iar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este un polinom cu coeficienți întregi, atunci

$$(iv) f(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv f(b_1, b_2, \dots, b_n) \pmod{m}$$

Se pot demonstra și următoarele proprietăți ale congruențelor:

$$(v) a \equiv b \pmod{m} \text{ și } c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$$

$$(vi) a \equiv b \pmod{m} \text{ și } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ divide } m \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

$$(vii) a \equiv b \pmod{m_i}, i = \overline{1, s} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

unde $m = [m_1, m_2, \dots, m_s]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor m_i .

$$(viii) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a, m) = (b, m)$$

unde prin (x, y) notăm cel mai mare divizor comun al numerelor x și y .

Deoarece relația de concurență mod m este o relație de echivalență, ea împarte mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi în clase de echivalență (clase de congruență mod m). Două astfel de clase sunt sau disjuncte sau coincid.

Cum orice număr întreg dă, prin împărțire la m unul din resturile $0, 1, 2, \dots, m-1$, rezultă că

$$C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$$

sunt cele m clase de resturi mod m , unde C_i este mulțimea nuerelor întregi congruente cu $i \pmod{m}$.

Uneori este util să se considere, în locul claselor, reprezentanți care să satisfacă diferite condiții. Astfel, este consacrată următoarea terminologie:

1.1.2. Definiție. Numerele întregi a_1, a_2, \dots, a_m formează un *sistem complet de resturi mod m* dacă oricare dintre ele sunt necongruente mod m .

Rezultă că un sistem complet de resturi mod m conține câte un reprezentant din fiecare clasă.

Dacă φ este funcția lui Euler (φ_n) este numărul numerelor naturale mai mici decât n și prime cu n), atunci avem și:

1.1.3. Definiție Numerele întregi $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$ formează un *sistem redus de resturi mod m* dacă fiecare este prim cu modulul și oricare două sunt necongruente mod m . Se știe că are loc următoarea teoremă:

1.14. Teoremă (i) Dacă a_1, a_2, \dots, a_m este un sistem complet de resturi mod m și a este un număr întreg, prim cu m , atunci șirul

$$a a_1, a a_2, \dots, a a_m$$

este tot un sistem complet de resturi mod m .

(ii) Dacă $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$ este un sistem redus de resturi mod m și a este un număr întreg prim cu m , atunci șirul

$$a a_1, a a_2, \dots, a a_{\varphi(m)}$$

este tot un sistem redus de resturi mod m .

Dacă notăm cu Z_m mulțimea claselor de resturi mod m :

$$Z_m = \{C_0, C_1, \dots, C_{m-1}\}$$

și definim operațiile

$$+: Z_m \times Z_m \rightarrow Z_m$$

$$\cdot: Z_m \times Z_m \rightarrow Z_m$$

prin

$$C_i + C_j = C_k, \text{ unde } k \equiv i + j \pmod{m}$$

$$C_i \cdot C_j = C_h, \text{ unde } h \equiv i \cdot j \pmod{m}$$

atunci are loc

1.1.5. Teoremă.

(i) $(Z_m, +)$ este grup comutativ

(ii) $(Z_m, +, \cdot)$ este inel comutativ

(iii) (G_m, \cdot) este grup comutativ,

unde $G_m = \{Cr_1, Cr_2, \dots, Cr_{\varphi(m)}\}$

este mulțimea claselor de resturi prime cu modulul.

1.1.6. Consecință. Mulțimea Z_p a claselor de resturi față de un modul prim p formează corp comutativ față de operațiile de adunare și înmulțire definite mai sus.

1.2. Teoreme de congruență din teoria numerelor

În acest paragraf vom aminti câte va teorem de congruență din teoria numerelor (teoremele Fermat, Euler, Wilson, Gauss, Lagrange, Leibniz, Moser și Sierpinski) pe care în paragraful următor le vom generaliza și vom pune în evidență un punct de vedere unificator pentru ele.

În 1640 enunță, fără a demonstra, următoarea teoremă:

1.2.1. Teoremă (*Fermat*). Dacă întregul a nu este divizibil prin numărul prim p , atunci

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Prima demonstrație a acestei teoreme a fost dată în 1736 de către Euler.

După cum se știe, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată. Cu alte cuvinte, din

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

și m nu este divizibil cu a , nu rezultă cu necesitate că m este număr prim.

Nu este adevărat nici măcar că dacă (1.2.1.) este adevărată pentru toate numerele a prime cu m , atunci m este prim, după cum se poate vedea din exemplul următor (H_1).

Fie $m = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Dacă a este un întreg care nu este divizibil cu 3, cu 11 sau cu 17, avem desigur:

$$a^2 \equiv 1 \pmod{3}, a^{10} \equiv 1 \pmod{11}, a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

conform teoremei directe a lui Fermat. Dar cum 560 este divizibil cu 2 și 10, cât și cu 16, deduce:

$$a^{560} \equiv 1 \pmod{m_i}, i = 1, 2, 3$$

$$\text{unde } m_1 = 3, m_2 = 11, m_3 = 17$$

Conform proprietății (vii) din paragraful precedent rezultă

$$a^{560} \equiv 1 \pmod{m_1 m_2 m_3}$$

$$\text{adică } a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}, \text{ pentru } m = 561.$$

De altfel, se știe că 561 este cel mai mic număr compus care satisface (1.2.1.). Urmează numerele 1105, 1729, 2465, 2821, ...

Prin urmare, congruența (1.2.1.) poate fi adevărată pentru un anumit întreg a și un număr compus m .

1.2.2. Definiție. Dacă (1.2.1.) este satisfăcută pentru un număr compus m și un număr întreg a se spune că m este *pseudoprim față de a* . Dacă m este pseudoprim față de orice întreg a prin care m , se spune că m este un *număr Carmichael*.

Matematicianul american Robert D. Carmichael a fost primul care în anul 1910 a pus în evidență astfel de numere, numite *numere prime imposter*.

Până nu demult nu se știa dacă există sau nu o infinitate de numere Carmichael. În chiar primul număr al revistei „What's

Happening in the Mathematical Sciences“, revistă în care sunt anunțate în fiecare an rezultatele mai importante obținute în matematică în ultima vreme, se anunță că trei matematicieni: Alford, Grandville și Pomerance, au arătat că există o infinitate de numere Carmichael.

Demonstrația trioului de matematicieni americani se bazează pe o observație euristică din 1956 a matematicianului maghiar de renume internațional P. Erdős. Ideea de bază este de a alege un număr L pentru care există multe numere prime p care nu divid pe L , dar cu proprietatea că $p-1$ divide pe L . Apoi se arată că aceste numere prime pot fi înmulțite între ele în multe feluri astfel încât fiecare produs să fie congruent cu 1 mod L . Rezultă că fiecare astfel de produs este un număr Carmichael.

De exemplu, pentru $L = 120$, numerele prime care îndeplinesc condiția amintită mai sus sunt:

$$p_1 = 7, p_2 = 11, p_3 = 13, p_4 = 31, p_5 = 41, p_6 = 61.$$

Rezultă că $41041 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$, $172081 = 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$ și $852841 = 11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61$ sunt congruente cu 1 mod 120, deci sunt numere Carmichael.

Menționăm că observația euristică a lui P. Erdős se bazează pe următoarea teoremă de caracterizare a numerelor Carmichael, demonstrată în anul 1899.

1.2.3. Teoremă (A. Korselt). Numărul n este un număr Carmichael dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile

(C_1) este liber de pătrate

(C_2) $p - 1$ divide pe $n - 1$ ori de câte ori p este un divizor prim al lui n .

Cei trei matematicieni americani au demonstrat următoarea teoremă:

1.2.4. Teoremă (Alford, Granville, Pomerance). Există cel puțin $x^{2/7}$ numere Carmichael mai mari decât x , pentru x suficient de mare.

Cu ajutorul argumentului euristic datorat lui P. Erdős se poate demonstra că exponentul $2/7$ din teorema de mai sus poate fi înlocuit cu orice alt exponent subunitar.

1.2.5. Teoremă (Euler). Dacă $(a, m) = 1$, atunci

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Această teoremă, care generalizează teorema lui Fermat, a fost demonstrată de Euler în 1760.

1.2.6. Teoremă (Wilson). Dacă p este un număr prim, atunci

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Se știe că reciproca teoremei lui Wilson este adevărată, adică are loc.

1.2.7. Teoremă. Dacă $n > 1$ este un număr întreg și

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

atunci n este număr prim.

Teorema lui Wilson a fost publicată prima dată în 1770 de matematicianul Waring (*meditationes algebraicae*), dar ea a fost cunoscută cu mult înainte, chiar de Leibniz.

Lagrange generalizează teorema lui Wilson astfel:

1.2.8. Teoremă (Lagrange). Dacă p este un număr prim, atunci

$$a^{p-1} - 1 \equiv (a+1)(a+2) \dots (a+p-1) \pmod{p}$$

iar Leibniz enunță următoarea teoremă:

1.2.9. Teoremă (Leibniz) Dacă p este număr prim, atunci

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$$

Este adevărată și reciproca teoremei lui Leibniz, adică un număr natural $n > 1$ este număr prim dacă și numai dacă

$$(n-2)! \equiv 1 \pmod{n}$$

Un alt rezultat privind congruențe cu numere prime este teorema următoare:

1.2.10. Teoremă (L. Moser). Dacă p este număr prim, atunci

$$(p-1)!a^p + a \equiv 0 \pmod{p}$$

iar Sierpinski demonstrează că are loc:

1.2.11. Teoremă (Sierpinski). Dacă p este număr prim, atunci

$$a^p + (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$$

Se observă că acest enunț unifică teoremele lui Fermat și Wilson.

În paragraful următor vom defini o funcție $L: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, cu ajutorul căreia vom putea demonstra rezultatele care unifică toate teoremele de mai sus.

1.3. Un punct de vedere unificator asupra unor teoreme de congruență din teoria numerelor

Să considerăm următoarele condiții pe care putem cere să le satisfacă un număr întreg $m \in \mathbb{Z}$.

1) Vom spune că numărul $m \in \mathbb{Z}$ satisface condiția (α_1) dacă:

$$m = \pm p^\beta \text{ sau } m = \pm 2 p^\beta$$

cu p număr prim și $\beta \in \mathbb{N}^*$

2) Vom spune că $m \in \mathbb{Z}$ satisface condiția (α_2) dacă

$$m = \pm 2^\alpha$$

cu $\alpha \in \{0, 1, 2\}$

Fie acum mulțimea A definită prin

$$A = \{m \in \mathbb{Z} / m \text{ satisface } (\alpha_1) \text{ sau } (\alpha_2)\} \cup \{0\}$$

Pentru un număr întreg m vom considera descompunerea în factori sub forma

$$m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

cu $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ și desigur $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, iar p_i sunt numere prime.

Definim funcția

$$L: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\text{prin } L(x, m) = (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)})$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(m)}$ este un sistem redus de resturi modulo m (vezi definiția 1.1.3.).

1.3.1. Lemă. Fie n un întreg nenul oarecare și $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Atunci dacă

$$C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(n^\alpha)}$$

este un sistem redus de resturi mod n^α , iar $k \in \mathbb{Z}$ și $\beta \in \mathbb{N}^*$,

rezultă că

$$k n^\beta + C_1, k n^\beta + C_2, \dots, k n^\beta + C_{\varphi(n^\alpha)}$$

este tot un sistem redus de resturi mod n^α .

Demonstrație. Este suficient să observăm că pentru $1 \leq i \leq \varphi(n^\alpha)$

avem

$$(k n^\beta + C_i, n^\alpha) = 1$$

1.3.2. Lemă. Dacă

$$C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(m)}$$

este un sistem de resturi mod m , atunci din condițiile

(1) $p_i^{\alpha_i}$ divide pe m

(2) $p_i^{\alpha_i + 1}$ nu divide pe m

rezultă că

$$C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(m)}$$

este un sistem redus de resturi modulo $p_i^{\alpha_i}$.

Demonstrația este trivială.

1.3.3. Lemă. Dacă $(b, q) = 1$ și

$$C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(q)}$$

este un sistem redus de resturi modulo q , atunci

$$b + C_1, b + C_2, \dots, b + C_{\varphi(q)}$$

conține un reprezentant al clasei $\hat{O} \pmod{q}$

Demonstrație. Deoarece $(b, q-b) = 1$, rezultă că există i_0 astfel încît

$$C_{i_0} \equiv q - b$$

$$\text{deci } b + C_{i_0} \equiv 0 \pmod{q}$$

Obținem atunci următorul rezultat:

1.3.4. Teoremă. Dacă $(x, m / (p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}))$ (Teorema 1 din lucrare), atunci $(x + C_1) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv 0 \pmod{m / (p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}})}$

Demonstrație.

1.3.5. Teoremă (Gauss). Dacă $C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(m)}$ este un sistem redus de resturi modulo m , atunci

$$(a) \ m \in A \Rightarrow C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} \equiv -1 \pmod{m}$$

$$(b) \ m \notin A \Rightarrow C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Utilizînd această teoremă obținem

1.3.6. Lemă. Avem

$$C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} \equiv \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

pentru orice $i \in ?$

Semnul în congruența precedentă fiind în concordanță cu condițiile $m \in A$, respectiv $m \notin A$.

1.3.7. Lemă. Dacă p_i este un divizor comun al lui x și m , atunci

$$(1) m \in A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

$$(2) m \notin A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

Demonstrație. Utilizând lemele precedente, avem

$$(x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} \equiv \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

Utilizând lema 1.3.7., obținem

1.3.8. Teoremă Dacă $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{is}$ sunt toate numerele prime care divid simultan pe x și m , atunci

$$(1) m \in A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv -1 \pmod{p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}}$$

$$(2) m \notin A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv 1 \pmod{p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}}$$

Notînd $d = p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}$ și $m' = m/d$

din teoremele 1.3.4. și 1.3.8. rezultă

$$L(x, m) \equiv \pm 1 + k_1 d = k_2 m'$$

unde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Să observăm că deoarece avem $(d, m') = 1$, rezultă că ecuația

$$k_2 m' - k_1 d = \pm 1$$

cu necunoscutele k_1 și k_2 admite soluții întregi.

Se știe că dacă notăm k_1^0, k_2^0 o soluție particulară a acestei ecuații, atunci

$$k_1 = m't + k_1^0, k_2 = d't + k_2^0 \text{ cu } t \in \mathbb{Z}$$

este soluția generală a ecuației și deci

$$L(x, m) = \pm 1 + m' dt + k_1^0 d \equiv \pm 1 + k_1^0 \pmod{m}$$

sau $L(x, m) \equiv k_2^* m' \pmod{m}$

Utilizând aceste rezultate, obținem următoarele generalizări:

1.3.9. Teoremă (generalizarea teoremei lui Lagrange). Dacă $m \neq 0, \pm 4$, iar $x^2 + s^2 = 0$, atunci

$$x^{\varphi(m_s) + s} - x^s \equiv (x + 1)(x + 2) \dots (x + |m| - 1) \pmod{m}$$

unde m_s și s se obțin din următorul algoritm:

$$(0) \begin{cases} x = x_0 d_0 \\ m = m_0 d_0 \text{ cu } d_0 \neq 1 \text{ și } (x_0, m_0) = 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_0 = d_0' d_1 \\ m_0 = m_1 d_1 \text{ cu } d_1 \neq 1 \text{ și } (d_0', m_1) = 1 \end{cases}$$

.....

$$(s-1) \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}' d_{s-1} \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} \text{ cu } d_{s-1} \neq 1 \text{ și } (d_{s-2}', m_{s-1}) = 1 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}' d_s \\ m_{s-1} = m_s d_s \text{ cu } d_s = 1 \text{ și } (d_{s-1}', m_s) = 1 \end{cases}$$

Demonstrație. Vezi F. Smarandache, „A generalization of Euler's theorem concerning congruences“, Bulet. Univ. Brașov, ser. C, vol. 23 (1981), pp. 7-12.

Din teorema precedentă, pentru un număr prim pozitiv rezultă $m_s = m$, $s = 0$ și $\varphi(m_s) = \varphi(m) = m-1$, deci obținem teorema lui Lagrange:

$$x^{m-1} - 1 \equiv (x + 1)(x + 2) \dots (x + m - 1)$$

Funcția L și algoritmul prezentat mai sus permit și generalizarea teoremei lui Moser și a teoremei lui Sierpinski. Astfel, deoarece avem

$$(1) m \in A \Rightarrow C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} a^{\varphi(m_s) + s} - L(o, m) a^s \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(2) m \notin A \Rightarrow -L(o, m) a^{\varphi(m_s) + s} + C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} a^s \equiv 0 \pmod{m}$$

Mai general:

$$(3) m \in A \Rightarrow (x+C_1) \dots (x+C_{\varphi(m)}) a^{\varphi(m_s)+s} - L(x, m) a^s \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(4) m \notin A \Rightarrow -L(x, m) a^{\varphi(m_s)+s} + (x+C_1) \dots (x+C_{\varphi(m)}) a^s \equiv 0 \pmod{m}$$

Din (1) pentru m număr prim, obținem teorema lui Fermat. Din (1) sau (2), pentru m număr compus oarecare, obținem teorema lui Euler.

1.4. Contribuții la o conjectură a lui Carmichael

Conjectura la care ne referim este următoarea:

„Ecuția $\varphi(m) = x$ nu poate avea soluție unică pentru nici un $n \in \mathbb{N}^*$, unde, desigur, φ este funcția lui Euler.

În $[G_3]$, R. K. Guy arată, studiind această conjectură Carmichael, că un număr natural n_0 care nu verifică conjectura trebuie să îndeplinească condiția $n_0 > 10^{37}$.

Ordinul de mărime pentru un astfel de n_0 a fost apoi extins de către V.L. Kler, care a arătat $[K_2]$ că trebuie să avem $n_0 > 10^{400}$ dacă n_0 nu satisface conjectura.

Amintim că în $[M_1]$ se demonstrează pentru un n_0 care nu satisface conjectura că avem

$$n_0 > 10^{10000}$$

În cele ce urmează vom arăta că ecuația

$$\varphi(m) = n \tag{1.4.1.}$$

admite un număr finit de soluții și vom da forma generală a acestora. De asemenea vom arăta că dacă x_0 este o soluție unică a ecuației (1.4.1.), pentru un n fixat, atunci

x_0 este multiplu al numărului $2^2 3^2 7^2 43^2$

Fie deci x_0 o soluție a ecuației (1.4.1.), pentru un n fixat. Vom construi cu ajutorul acesteia o altă soluție $y_0 \neq x_0$. Pentru aceasta vom utiliza următoarele două metode:

Metoda 1. Descompunem pe x_0 sub forma $x_0 = ab$, cu a și b întregi, având proprietatea $(a, b) = 1$. Dacă alegem $a' \neq a$ astfel încât

$$\varphi(a') = \varphi(a) \text{ și } (a', b) = 1$$

va rezulta că $y_0 = a'b$ este o nouă soluție a ecuației.

Metoda 2. Să considerăm soluția x_0 descompusă în factori primi

$$x_0 = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r} \quad (1.4.2)$$

unde $\beta_1 \in \mathbb{N}^*$, iar q_1, q_2, \dots, q_r sunt așadar numere prime distincte.

Dacă găsim un întreg q având proprietățile

$$1) (q, x_0) = 1$$

$$2) \varphi(q) \text{ divide pe } \frac{x_0}{q_1, q_2, \dots, q_r}$$

atunci $y_0 = \frac{x_0 q}{\varphi(q)}$ este o nouă soluție a ecuației.

Se observă imediat că alegerea q număr prim este neconvenabilă.

1.4.1. Lemă. Ecuația (1.4.1.) admite un număr finit de soluții, oricare ar fi numărul $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Cazurile $n = 0$ și $n = 1$ sunt banale. Fie deci $n \geq 2$ fixat și fie

$$p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq n + 1$$

șirul numerelor prime care nu depășesc pe $n + 1$.

Dacă x_0 este o soluție a ecuației (1.4.1.), atunci x_0 se poate exprima cu ajutorul numerelor prime p_i sub forma

$$x_0 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

cu $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Deoarece pentru orice $i = \overline{1, s}$ există $a_i \in \mathbb{N}$ astfel încît $p_i^{\alpha_i} \geq n$, rezultă că $0 \leq \alpha_i \leq a_i + 1$ pentru orice i . Obținem deci o martine superioară pentru numărul soluțiilor ecuației. Acest număr nu poate depăși

$$\prod_{i=1}^s (a_i + 2)$$

1.4.2. Lemă. Orice soluție a ecuației (1.4.1.) are forma (1) sau (2).

$$x_0 = n \left(\frac{p_1}{p_1-1} \right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{p_2}{p_2-1} \right)^{\varepsilon_2} \dots \left(\frac{p_s}{p_s-1} \right)^{\varepsilon_s} \in \mathbb{Z}$$

unde, pentru $i = \overline{1, s}$, avem

$$\varepsilon_i = 0 \text{ dacă } \alpha_i = 0$$

$$\varepsilon_i = 1 \text{ dacă } \alpha_i \neq 0$$

1.4.3. Lemă. Dacă x_0 este soluție unică pentru ecuația (1.4.1.), atunci x_0 este multiplu de $2^2 3^2 7^2 43^2$.

Demonstrație. Deoarece $\varphi(0) = \varphi(3)$ și $\varphi(1) = \varphi(2)$, putem presupune $x_0 \geq 4$.

Dacă 2 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 2 x_0 \neq x_0$ este o altă soluție a ecuației, deoarece $\varphi(x_0) = \varphi(y_0)$.

Deci trebuie ca 2 să fie divizor al lui x_0 .

Dacă 4 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = x_0/2$ este o nouă soluție a ecuației. Rezultă că 4 este divizor al lui x_0 .

Dacă 3 nu divide pe x_0 , atunci $3x_0/2$ este o nouă soluție a ecuației, deci trebuie ca 3 să fie divizor al lui x_0 . De asemenea, dacă 9 nu divide pe x_0 atunci $y_0 = 2x_0/3$ este o altă soluție a ecuației. Prin urmare 9 divide pe x_0 .

Dacă 7 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 7x_0/6$ este o nouă soluție a ecuației, deci trebuie ca 7 să dividă pe x_0 .

Dacă 7^2 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 6x_0/7$ este o nouă soluție a ecuației. Deci trebuie ca și 49 să dividă pe x_0 .

Acum, dacă 43 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 43x_0/42$ este o nouă soluție a ecuației, deci trebuie ca 43 să dividă pe x_0 .

Dacă în plus 43^2 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 42x_0/43$ este o nouă soluție a ecuației. Deci 43^2 divide pe x_0 și în concluzie de $2^2 3^2 7^2 43^2$ divide pe x_0 .

Rezultă că o soluție unică a ecuației (1.4.1) este de forma

$$x_0 = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 7^{\gamma_3} 43^{\gamma_4} t$$

cu $\gamma_i \geq 2$ și $(t, 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43) = 1$.

Deoarece $n_0 > 10^{10.000}$, rezultă că $x_0 > 10^{10.000}$.

Dacă $\gamma_1 > 3$ și prin absurd 5 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 5x_0/4$ este o nouă soluție a ecuației. Prin urmare, 5 divide pe x_0 .

Dacă 25 nu divide pe x_0 , atunci $y_0 = 4x_0/5$ este o nouă soluție a ecuației. Prin urmare 25 divide pe x_0 .

Vom construi acum prin recurență o mulțime M de numere prime având proprietatea că dacă M este infinită, atunci conjectura lui Carmichael este rezolvată.

Etaple de recurență sunt următoarele:

(a) numerele 2, 3, 5 aparțin lui M .

(b) dacă numerele prime distincte e_1, e_2, \dots, e_n sunt din M , atunci numărul

$$b_m = 1 + 2^m e_1 e_2 \dots e_n$$

este prim pentru $m = 1$ sau $m = 2$, și vom considera că $b_m \in M$.

(c) Orice element aparținând lui M se obține prin utilizarea, într-un număr finit de pași, numai a regulilor (a) și (b).

Dacă M este infinită, conjectura lui Carmichael este rezolvată.

Considerăm că mulțimea M este infinită.

De altfel se poate constata că din cele 168 de numere prime mai mici decât 1.000, doar 17 nu sunt în M . Acestea sunt:

101, 151, 197, 251, 401, 491, 503, 601, 607, 677, 701, 727, 751, 809, 883, 907, 983.

1.5. Funcții prime

Să considerăm următoarele funcții:

$$1) P_1: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ este prim} \\ 1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Exemple. $P_1(0) = P_1(1) = P_1(4) = P_1(6) = 1$, $P_1(2) = P_1(3) = P_1(5) = 0$

$$2) P_2: \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P_2(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m \text{ și } n \text{ sunt prime între ele} \\ 1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

3) Mai general, $P_k: N^k \rightarrow \{0, 1\}$

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ sunt prime între ele} \\ 1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

În continuare vom studia în ce condiții

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0 \quad (1.5.1.)$$

Vom da o condiție necesară și suficientă ca n numere prime două câte două să fie simultan prime între ele.

Generalizăm teorema lui Popa [P_4], Cucurezeanu ($[C_3]$, p. 165), Clement și Patrizio [P_5].

Următoarea leamnă este evidentă.

1.5.1. Lemă. Dacă A și B sunt întregi nenegativi, atunci

$$AB \equiv 0 \pmod{pB} \Leftrightarrow A \equiv 0 \pmod{p}$$

1.5.3. Lemă. Fie a, b, p, q , numere întregi astfel încât

$$(p, q) = (a, p) = (b, q) = 1$$

Atunci

$$A \equiv 0 \pmod{p} \text{ și } B \equiv 0 \pmod{q} \Leftrightarrow aAq + bBp \equiv 0 \pmod{pq} \Leftrightarrow aA + (bBp/q) \equiv 0 \pmod{p}$$

Demonstrație. Pentru prima echivalență avem

$$A = k_1p, B = k_2q \text{ cu } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{deci } aAq + bBp = (ak_1 + bk_2)pq$$

Reciproc, din $aAq + bBp = kpq$ rezultă $aAq \equiv 0 \pmod{p}$ și $bBp \equiv 0 \pmod{q}$

și datorită ipotezei rezultă

$$A \equiv 0 \pmod{p} \text{ și } B \equiv 0 \pmod{q}$$

A două și a treia echivalență rezultă utilizând lema 1.5.1.

1.5.3. Lemă Dacă p_1, p_2, \dots, p_n sunt numere întregi prime două câte două, iar a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere întregi avînt proprietatea

$$(a_i, p_i) = 1 \text{ pentru } i = \overline{1, n}$$

Atunci, notînd $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ și D fiind un divizor al lui P avem

$$A_1 \equiv 0 \pmod{p_1}, A_2 \equiv 0 \pmod{p_2}, \dots, A_n \equiv 0 \pmod{p_n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i A_i) \prod_{j \neq i} p_j \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \dots p_n} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{P}{D}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i A_i}{p_i}\right) \equiv 0 \pmod{P/D} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i A_i}{p_i}\right) \text{ este un întreg.}$$

Demonstrația acestei leme se face prin inducție, utilizând lema precedentă.

Cu ajutorul acestei ultime leme obținem următoarea teoremă generală

1.5.4. Teoremă. Fie p_{ij} , cu $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m_i}$, numere prime două câte două și fie $r_1, r_2, \dots, r_n, a_1, a_2, \dots, a_n$, numere întregi, astfel încît $(a_i, r_i) = 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Presupunem în plus că numerele C_1, C_2, \dots, C_n îndeplinesc condiția

(i) $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i}$ sunt simultan prime $\Leftrightarrow C_i \equiv 0 \pmod{r_i}$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Atunci numerele p_{ij} cu $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m_i}$, sunt simultan prime dacă și numai dacă este îndeplinită condiția

$$\left(\frac{R}{D}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i c_i}{r_i} \right) \equiv 0 \pmod{\frac{R}{D}} \quad (1.5.2.)$$

unde $R = r_1 r_2 \dots r_n$, iar D este un divizor al lui R .

Demonstrație:

(Vezi F. Smarandache, "Characterization of n prime numbers simultaneously", in «Libertas Mathematica», Texas State University, Arlington, SUA, vol.XL (1991), pp. 151-155).

Observație. Dacă în condiția (i) din teoremă modulul r_i este înlocuit cu $\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ sau cu un divizor al său, concluzia (1.5.2) devine

$$\left(\frac{P}{D}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i c_i}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}} \right) \equiv 0 \pmod{\frac{P}{D}} \quad (1.5.3.)$$

unde $P = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ și D este un divizor al lui P .

Desigur congruența (1.5.3) este echivalentă cu una din condițiile

$$\sum_{i=1}^n a_i c_i \left(\frac{P}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}} \right) \equiv 0 \pmod{P} \quad (1.5.4.)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i c_i}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}} \right) \text{ este număr întreg} \quad (1.5.5)$$

Să observăm de asemenea că restricția impusă numerelor p_{ij} în teorema de mai sus de a fi prime între ele, este suficient de

convenabilă, deoarece dacă două dintre aceste numere nu sunt prime între ele, atunci cel puțin unul dintre ele nu este prim și deci nici cele $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ numere nu sunt toate prime.

Putem obține multe variante ale acestei teoreme, dînd parametrilor a_1, a_2, \dots, a_n și r_1, r_2, \dots, r_n diverse valori.

Observații.

1) Dacă în teorema de mai sus luăm $m_i = 1$, iar c_i reprezintă teorema lui Simionov pentru orice i , atunci

2) Pentru $D = 1$, obținem teorema lui V. Popa [P₄] care și ea generalizează teorema lui I. Cucurezeanu [C₃], iar aceasta din urmă generalizează teorema lui Clement.

3) Pentru $D = P/p_2$ și o alegere convenabilă a parametrilor a_i și k_i rezultă teorema lui S. Patrizio.

Exemple.

1) Fie p_1, p_2, \dots, p_n întregi pozitivi, primi doi cîte doi și numerele k_i satisfăcînd condiția $1 \leq k_i \leq p_i$, pentru orice i . Atunci p_1, p_2, \dots, p_n sunt simultan prime dacă și numai dacă este verificată una din condițiile:

$$(T) \quad \sum_{i=1}^n \left[(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i} \right] \cdot \prod_{j \neq i} p_j \equiv 0 \pmod{p_1 \dots p_n}$$

$$(U) \quad \left(\sum_{i=1}^n \left[(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i} \right] \cdot \prod_{j \neq i} p_j \right) \Bigg/ \left(p_{s+1} \dots p_n \right) \equiv 0 \pmod{p_1 \dots p_s}$$

$$(V) \quad \sum_{i=1}^n \left[(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i} \right] \cdot p_j / p_i \equiv 0 \pmod{p_j}$$

$$(W) \quad \sum_{i=1}^n \left[(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i} \right] \Bigg/ p_i \text{ este întreg}$$

Capitolul 2

2.1. Baze de numerație generalizate

Se știe că dacă r este un număr natural strict mai mare decât unu, atunci orice număr natural n poate fi scris în baza de numerație r astfel:

$$n = C_m r^m + C_{m-1} + \dots + C_1 r + C_0 \quad (2.1.1.)$$

unde $m \geq 0$ este număr natural și C_i , pentru $i = \overline{0, m}$, sunt de asemenea numere naturale, cu proprietatea $0 \leq C_i \leq r-1$ pentru orice $i = \overline{0, m}$, iar $C_m \neq 0$.

Fiecărui număr din șirul $0, 1, 2, \dots, r-1$ i se poate atribui un simbol care se numește cifră și atunci formula (2.1.1.) se poate scrie

$$n = \gamma_m \gamma_{m-1} \dots \gamma_1 \gamma_0 (r)$$

unde γ_i este cifra care simbolizează numărul C_i .

Se știe că orice număr natural poate fi scris în mod unic într-o bază de numerație oarecare r , adică poate fi scris sub forma (2.1.1.), unde numerele C_i satisfac condițiile menționate mai sus.

Dacă notăm $a_i = r^i$ observăm că șirul $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisface relația de recurență

$$a_{i+1} = r a_i \quad (2.1.3.)$$

și că (2.1.1) devine

$$n = C_m a_m + C_{m-1} a_{m-1} + \dots + C_1 a_1 + C_0 \quad (2.1.4)$$

De aici ideea de a considera un şir strict crescător oarecare $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ şi se poate observa cu uşurinţă că orice număr natural n poate fi scris în mod unic sub forma

$$n = C_h b_h + C_{h-1} b_{h-1} + \dots + C_1 b_1 + C_0 \quad (2.1.5.)$$

dar condiţiile pe care le satisfac cifrele c_i nu mai sunt atât de simple ca în cazul bazei determinate de şirul cu termen general a_i .

Spre exemplu, şirul lui Fibonacci, determinat de condiţiile

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$$

poate fi considerat o bază de numeraţie generalizată. Această bază are marele avantaj (ca şi baza de numeraţie doi) că cifrele C_i pot lua doar valorile 0 şi 1, deoarece $b_i > b_{i+1}$.

Avantajul utilizării acestei baze generalizate este foarte mare în reprezentarea numerelor în calculatoarele electronice, deoarece, pe de-o parte, se folosesc tot două cifre ca şi în baza doi, iar pe de altă parte pentru memorarea unui număr este nevoie de o cantitate mai mică de memorie deoarece numărul cifrelor necesare pentru reprezentarea lui n în baza $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ este mai mic decât numărul cifrelor necesare pentru reprezentarea aceluiaşi n în baza $(2^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

O altă bază generalizată, care va fi utilizată în paragrafele următoare, este baza de numeraţie determinată de şirul

$$a_i(p) = (p^i - 1) / (p - 1) \quad (2.1.6.)$$

unde $p > 1$ este un număr natural.

Să observăm că relaţia de recurenţă satisfăcută de acest şir:

$$a_{i+1}(p) = p a_i(p) + 1 \quad (2.1.7.)$$

este totuşi destul de simplă, dar diferă de relaţia de recurenţă clasică (2.1.3.).

Bineînțeles că orice număr natural n poate fi scris în mod unic sub forma

$$n = C_m a_m + C_{m-1} a_{m-1} + \dots + C_1 a_1 + a_0 \quad (2.1.8.)$$

Pentru a determina condițiile pe care le îndeplinesc cifrele C_i în acest caz vom demonstra următoarea teoremă

2.1.1. Lemă. Pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*, p \neq 1$, numărul n poate fi scris în mod unic sub forma

$$n = t_1 a_{n_1}(p) + t_2 a_{n_2}(p) + \dots + t_e a_{n_e}(p) \quad (2.1.9.)$$

cu $n_1 > n_2 > \dots > n_e > 0$ și

$1 \leq t_j \leq p-1$ pentru $j = \overline{1, e-1}$, iar

$$1 \leq t_e \leq p \quad (2.1.10.)$$

Demonstrație. Din relația de recurență satisfăcută de șirul cu termen general $a_i(p)$ deducem:

$$a_1(p) = 1, a_2(p) = 1+p, a_3(p) = 1 + p + p^2, \dots$$

$$\text{deci } \mathbb{N}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} ([a_i(p), a_{i+1}(p)] \cap \mathbb{N}^*)$$

$$\text{întrucît } [a_i(p), a_{i+1}(p)] \cap [a_{i+1}(p), a_{i+2}(p)] = \emptyset$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există atunci un unic n_1 astfel încît $n \in [a_{n_1}(p), a_{n_1+1}(p)]$ și deci avem

$$n = \left[\frac{n}{a_{n_1}(p)} \right] a_{n_1}(p) + r_1$$

$$\text{Notînd } t_1 = \left[\frac{n}{a_{n_1}(p)} \right] \text{ obținem}$$

$$n = t_1 a_{n_1}(p) + r_1, \text{ cu } r_1 < a_{n_1}(p)$$

Dacă $r_1 = 0$, din inegalitățile

$$a_{n_1}(p) \leq n \leq a_{n_1+1}(p) - 1 \quad (2.1.11)$$

deducem $1 \leq t_1 \leq p$.

Dacă $r_1 \neq 0$, există un unic $n_2 \in \mathbb{N}^*$, astfel încît

$r_1 \in [a_{n_2}(p), a_{n_2+1}(p)]$ și cum $a_{n_1}(p) > r_1$, rezultă $n_1 > n_2$. De asemenea, din (2.1.11.) rezultă în acest caz $1 \leq t_1 \leq p-1$, deoarece

$$t_1 \leq \frac{a_{n_2+1} - 1 - r_1}{a_{n_1}(p)} < p$$

Obținem în continuare

$$r_1 = t_2 a_{n_2}(p) + r_2$$

și continuînd procesul, după un număr finit de pași obținem:

$$r_{e-1} = t_e a_{n_e}(p) + r_e \text{ cu } r_e = 0$$

și $n_e < n_{e-1}$, iar $1 \leq t_e \leq p$ și lema este demonstrată.

Să observăm că în (2.1.9), spre deosebire de 2.1.8.), toate cifrele t_i sunt semnificative (mai mari ca zero). Prin urmare, despre cifrele C_i din (2.1.8.) putem spune că ele sunt cuprinse între zero și $p-1$, cu excepția ultimei cifre semnificative, care poate fi și p .

De asemenea să observăm că diferența dintre relațiile de recurență (2.1.3.) și (2.1.7) induce mari diferențe de calcul în baza standard.

$$(p) : 1, p, p^2, \dots, p^i, \dots \quad (2.1.12.)$$

$$[p] : a_1(p), a_2(p), \dots, a_i(p), \dots \quad \text{și baza generalizată} \quad (2.1.13.)$$

Într-adevăr, așa cum se arată în $[A_1]$, dacă $m_{[5]} = 442$, $n_{[5]} = 412$,
 $r_{[5]} = 44$

atunci $m + n + r = 442 +$

$$\begin{array}{r} 412 \\ 44 \\ \hline d \ c \ b \ a \end{array}$$

și pentru a determina cifrele acestei sume, începem adunarea din coloana a doua, corespunzătoare lui $a_2(5)$. Avem

$$4a_2(5) + a_2(5) + 4a_2(5) = 5a_2(5) + 4a_2(5)$$

Acum, utilizând o unitate din prima coloană obținem

$$5a_2(5) + 4a_2(5) = a_3(5) + 4a_2(5)$$

deci (deocamdată) $b = 4$. Continuând, obținem

$$4a_3(5) + 4a_3(5) + a_3(5) = 5a_3(5) + 4a_3(5)$$

și utilizând o nouă unitate din prima coloană, rezultă

$$4a_3(5) + 4a_3(5) + a_2(5) = a_4(5) + 4a_3(5)$$

deci $C = 4$ și $d = 1$.

În sfârșit, adunând cifrele rămase

$$4a_1(5) + 2a_1(5) = 5a_1(5) + a_1(5) = 5a_1(5) + 1 = a_2(5)$$

rezultă că b trebuie să fie modificat, iar $a = 0$.

Deci $m+n+r = 1450_{[5]}$.

2.2. O nouă funcție în teoria numerelor

În acest paragraf vom construi o funcție $S: \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{N}$ având proprietățile

(s1) $S(n)!$ este divizibil cu n

(s2) $S(n)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea (p1).

Fie $p > 0$ un număr prim. Vom construi mai întâi funcția

$S_p: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$

astfel:

$$(a) \operatorname{Sp}(a_i(p)) = p^i$$

(b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este scris sub forma (2.1.9.) definim $\operatorname{Sp}(n) = t_1 \operatorname{Sp}(a_1(p)) + t_2 \operatorname{Sp}(a_2(p)) + \dots + t_e \operatorname{Sp}(a_e(p))$

2.2.1. Lemă. Pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$, exponentul la care apare numărul prim p în descompunerea lui $n!$ în factori primi este mai mare sau egal cu n .

De asemenea amintim o formulă datorată lui Legendre care permite calculul exponentului la care apare numărul prim p în descompunerea în factori a numărului $n!$. Acest exponent este

$$e_p(n) = [n/p] + [n/p^2] + \dots \quad (2.2.1.)$$

Demonstrație. Se știe că notînd cu s_x partea întreagă a numărului x avem:

$$\left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b} \right] \geq \left[\frac{a_1}{b} \right] + \left[\frac{a_2}{b} \right] + \dots + \left[\frac{a_n}{b} \right]$$

pentru orice $a_i, b \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, dacă n are scrierea (2.1.9), obținem

$$\left[\frac{t_1 p^{a_1} + t_2 p^{a_2} + \dots + t_e p^{a_e}}{p} \right] \geq \left[\frac{t_1 p^{a_1}}{p} \right] + \left[\frac{t_2 p^{a_2}}{p} \right] + \dots + \left[\frac{t_e p^{a_e}}{p} \right] = t_1 p^{a_1-1} + t_2 p^{a_2-1} + \dots + t_e p^{a_e-1}$$

$$\left[\frac{t_1 p^{a_1} + t_2 p^{a_2} + \dots + t_e p^{a_e}}{p^{n_e}} \right] \geq \left[\frac{t_1 p^{a_1}}{p^{n_e}} \right] + \left[\frac{t_2 p^{a_2}}{p^{n_e}} \right] + \dots + \left[\frac{t_e p^{a_e}}{p^{n_e}} \right] = t_1 p^{a_1-n_e} + t_2 p^{a_2-n_e} + \dots + t_e p^{a_e-n_e}$$

$$\left[\frac{t_1 p^{a_1} + t_2 p^{a_2} + \dots + t_e p^{a_e}}{p^{n_1}} \right] \geq \left[\frac{t_1 p^{a_1}}{p^{n_1}} \right] + \left[\frac{t_2 p^{a_2}}{p^{n_1}} \right] + \dots + \left[\frac{t_e p^{a_e}}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^{a_1-n_1} + \left[\frac{t_2 p^{a_2}}{p^{n_1}} \right] + \dots + \left[\frac{t_e p^{a_e}}{p^{n_1}} \right]$$

și deci

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^{n_e}} \right\rfloor \geq$$

$$t_1(p^{n_1-1} + p^{n_1-2} + \dots + p^0) + \dots + t_e(p^{n_e-1} + p^{n_e-2} + \dots + p^0) =$$

$$= t_1 a_n(p) + t_2 a_n(p) + \dots + t_e a_n(p) = n$$

2.2.2. Teoremă. Funcția Sp definită prin condițiile s_3 și s_4 de mai sus are proprietățile

(1) $Sp(n)!$ este multiplu de p^n

(2) $Sp(n)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea (1)

Demonstrație.. Proprietatea (1) rezultă din lema precedentă.

Pentru a demonstra pe (2), fie $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare și $p \geq 2$ un număr prim. Să considerăm pe n scris sub forma (2.1.9) și să notăm

$$z = t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \dots + t_e p^{n_e}$$

Vom arăta că z este cel mai mic număr natural cu proprietatea (1).

Presupunând prin absurd că există $n \in \mathbb{N}^*$, $u < z$, astfel încît $u!$ este multiplu de p^n , atunci

$$u < z \Rightarrow u \leq z-1 \Rightarrow (z-1)! \text{ este multiplu de } p^n.$$

Dar

$$z-1 = t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \dots + t_e p^{n_e} - 1$$

$$\text{cu } n_1 > n_2 > \dots > n_e \geq 1 \text{ și}$$

$$\left\lfloor \frac{z-1}{p} \right\rfloor = t_1 p^{n_1-1} + t_2 p^{n_2-1} + \dots + t_e p^{n_e-1} - 1$$

deoarece $[k + \alpha] = k + [\alpha]$ pentru orice k întreg și $[-1/p] = -1$

În mod asemănător avem de exemplu

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_e}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_e} + \dots + t_{e-1} p^{n_{e-1} - n_e} + t_e p^0 - 1$$

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_e+1}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_e - 1} + \dots + t_{e-1} p^{n_{e-1} - n_e - 1} + \left[\frac{t_e p^{n_e} - 1}{p^{n_e+1}} \right] =$$

$$= t_1 p^{n_1 - n_e - 1} + \dots + t_{e-1} p^{n_{e-1} - n_e - 1}$$

deoarece

$$0 < t_e p^{n_e-1} \leq p \cdot p^{n_e-1} < p^{n_e+1}$$

De asemenea

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_{e-1}}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_{e-1}} + \dots + t_{e-1} p^0 + \left[\frac{t_e p^{n_e} - 1}{p^{n_{e-1}}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_{e-1}} + \dots + t_{e-1} p^0$$

Ultima egalitate de acest fel care ne interesează este

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0 + \left[\frac{t_2 p^{n_2} + \dots + t_e p^{n_e} - 1}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0$$

deoarece

$$0 < t_2 p^{n_2} + \dots + t_e p^{n_e} \leq (p-1) p^{n_2} + \dots + (p-1) p - p p^{n_e} - 1 \leq$$

$$\leq (p-1) \sum_{i=n_{e-1}}^{n_2} p^i + p^{n_e+1} - 1 \leq (p-1) \frac{p^{n_2+1}}{p-1} = p^{n_2+1} - 1 < p^{n_1} - 1 < p^{n_1}$$

Într-adevăr, pentru următoarea putere a lui p avem

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1+1}} \right] = \left[\frac{t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \dots + t_e p^{n_e}}{p^{n_1+1}} \right] = 0$$

deoarece $0 < t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \dots + t_e p^{n_e} - 1 < p^{n_1+1} - 1 < p^{n_1+1}$

Din aceste egalități deducem că exponentul lui p în descompunerea în factori a lui $(z-1)!$ este:

$$\left\lfloor \frac{z-1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z-1}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{z-1}{p^{n_1}} \right\rfloor = t_1 (p^{n_1-1} + p^{n_1-2} + \dots + p^0) + \dots + \\ + t_{e-1} (p^{n_{e-1}-1} + \dots + p^0) + t_e (p^{n_e-1} + \dots + p^0) - n_e = n - n_e < n - 1 < n$$

și contradicția obținută demonstrează teorema.

Acum putem construi funcția $S: N^* \rightarrow N^*$ avînd proprietățile (s1) și (s2), astfel:

(i) $S(\pm 1) = 1$

(ii) pentru orice $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ cu $\varepsilon = \pm 1$ și p_i numere prime, $p_i \neq p_j$ pentru $i \neq j$, iar $\alpha_i \geq 1$, definim

$$S(n) = \max Sp_i(\alpha_i) \quad (2.2.2.)$$

2.2.3. Teoremă. Funcția S definită prin condițiile (i) și (ii) de mai sus are proprietățile (s1) și (s2).

Demonstrație. Dacă $n = \pm 1$, $S(n)$ satisface condițiile (s1) și (s2).

Să presupunem că $n \neq \pm 1$ și să notăm cu Mx un multiplu de x , iar

$$Sp_{i0}(\alpha_{i0}) = \max Sp_i(\alpha_i) \quad (2.2.3.)$$

Avem $Sp_{i0}(\alpha_{i0})! = Mp_{i0}^{\alpha_{i0}}$ și deoarece

$$Sp_i(\alpha_i)! = Mp_i^{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, s}$$

rezultă

$$Sp_{i0}(\alpha_{i0})! = Mp_i^{\alpha_i} \text{ pentru } i = \overline{1, s}$$

În plus, deoarece $(p_i, p_j) = 1$, obținem

$$Sp_{i0}(\alpha_{i0})! = Mp_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

și deci (s1) este demonstrată.

Pentru demonstrarea lui (s2) să observăm că deoarece $Sp_{i0}(\alpha_{i0})$ este cel mai mic număr natural k cu proprietatea $k! = Mp_{i0}^{\alpha_{i0}}$, rezultă că pentru orice $u < Sp_{i0}(\alpha_{i0})$ avem

$$u! \neq Mp_{i0}^{\alpha_{i0}}$$

deci

$$u! \neq M(\epsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = Mn$$

Ceea ce demonstrează proprietatea (s2).

2.2.4. Propoziție. Funcțiile Sp , cu p număr prim sunt crescătoare și surjective, dar nu sunt injective. Funcția $S: \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ este "în general crescătoare" în sensul că

$$\forall n \exists k \quad S(k) \geq n$$

de asemenea este surjectivă, dar nu este injectivă

Demonstrație. Evidentă.

2.2.5. Consecințe.

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$Sp(\alpha) = S(p^\alpha) \quad (2.2.4.)$$

2. Pentru orice număr natural $n > 4$ avem

$$n \text{ este prim} \Leftrightarrow S(n) = n$$

Într-adevăr, dacă $n \geq 5$ este număr prim atunci

$$S(n) = S_n(1) = n$$

Reciproc, dacă $S(n) = n$, pentru $n > 4$ și presupunem prin absurd că n nu este prim, adică

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

cu $s \geq 2$ și $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ pentru $i = \overline{1, s}$, atunci fie $Sp_{i0}(\alpha_{i0})$ dat de (2.2.3.). Din formula lui Legendre (2.2.1.) deducem

$$Sp_{i0}(\alpha_{i0}) < \alpha_{i0} p_{i0} < n$$

ceea ce contrazice presupunerea făcută.

De asemenea, dacă $n = p^\alpha$, cu $\alpha \geq 2$, obținem

$$S(n) = Sp(\alpha) \leq p\alpha < p^\alpha = n$$

și teorema este demonstrată.

Exemplu. Dacă $n = \pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}$, pentru calculul lui $S(n)$ ținem cont că

$$s(n) = \max \{S_2(31), S_3(27), S_7(13)\} \quad (2.2.5.)$$

iar pentru a calcula pe $S_2(31)$ considerăm baza numerică generalizată

[2]: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

În această bază avem $31 = 1 \cdot a_5(2)$ deci $S_2(31) = 1 \cdot 2^5 = 32$

Pentru calculul lui $S_3(27)$ considerăm baza generalizată

[3]: 1, 4, 13, 40, ...

și avem $27 = 2 \cdot 13 + 1 = 2 a_3(3) = a_1(3)$, deci

$$\begin{aligned} S_3(27) &= S_3(2a_3(3) + a_1(3)) = 2S_3(a_3(3)) + S_3(a_1(3)) = \\ &= 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^1 = 57 \end{aligned}$$

În sfârșit, pentru a calcula pe $S_7(13)$ considerăm baza generalizată

[7]: 1, 8, 57, ...

și deducem $13 = 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = a_2(7) + 5a_1(7)$

$$\text{deci } S_7(13) = 1 \cdot S_7(8) + 5S_7(1) = 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 = 84$$

Din (2.2.5.) deducem $S(n) = 84$. Așadar, 84 este cel mai mic număr al cărui factorial este divizibil cu n .

2. Care sunt numerele ale căror factoriale se termină exact cu o mie de zerouri?

Pentru a răspunde la această întrebare observăm că pentru $n = 10^{1000}$ avem $S(n)! = M \cdot 10^{1000}$ și acest $S(n)$ este cel mai mic număr natural al cărui factorial se termină cu o sută de zerouri.

$$\text{Avem } S(n) = S(2^{1000} \cdot 5^{1000}) = \max \{S_2(1000), S_5(1000)\} = S_5(1000)$$

Considerăm baza numerică generalizată

[5]: 1, 6, 31, 156, 781, ...

$$\text{Obținem } S_5(1000) = S_5(1 \cdot a_5(5) + 1 \cdot a_4(5) + 2 \cdot a_3(5) + 1 \cdot a_1(5)) = 5^5 + 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 5 = 4005$$

Numerele 4006, 4007, 4008 și 4009 au și ele proprietatea cerută în enunț, dar 4010 are proprietatea că factorialul său are 1001 zerouri.

Să observăm că

$$a_m(p) \leq \alpha \Leftrightarrow (p^m - 1) / (p - 1) \leq \alpha \Leftrightarrow p^m \leq (p - 1)\alpha + 1 \Leftrightarrow m \leq \log_p((p - 1)\alpha + 1)$$

$$\text{iar } \alpha_{[p]} = k_v a_v(p) + k_{v-1} a_{v-1}(p) + \dots + k_1 a_1(p) = k_v k_{v-1} \dots k_1 [p]$$

este scrierea exponentului α în baza $[p]$, atunci v e partea întreagă a lui $\log_p((p-1)\alpha+1)$, iar cifra k_v este obținută din egalitatea

$$\alpha = k_v a_v(p) + r_{v-1}$$

Procedînd analog cu r_{v-1} obținem indicele $v-1$ și pe k_{v-1} etc.

2.3. Formule de calcul pentru $S(n)$

Din proprietatea (b) pe care o satisface funcția Sp (§2.2.) deducem că

$$S(p^\alpha) = p(\alpha_{[p]})_{(p)} \quad (2.3.1.)$$

adică $S(p^\alpha)$ se obține înmulțind cu p numărul α scris în baza $[p]$ și "citit" în baza (p) .

Exemplu. Pentru calculul lui $S(11^{1000})$ procedăm astfel: ținând cont că baza [11] este

[11]: 1, 12, 133, 1464, ...

avem $1000 = 7 \cdot 133 + 5 \cdot 12 + 9 = 759_{[11]}$, deci

$$S(11^{1000}) = 11(759)_{(11)} = 11(7 \cdot 11^2 + 5 \cdot 11 + 9) = 10021$$

Prin urmare, 10021 este cel mai mic număr natural al cărui factorial este divizibil cu 11^{1000} .

Egalitatea (2.3.1.) e arată importanța bazelor (p) și [p] în calculul lui $S(n)$. Fie

$$\alpha_{(p)} = \sum_{i=0}^n C_i p^i \quad (2.3.2.)$$

$$\alpha_{[p]} = \sum_{j=1}^r k_j a_j(p) = \sum_{j=1}^r k_j \frac{p^j - 1}{p - 1}$$

expresia exponentului α în cele două baze. Obținem

$$(p-1) \alpha = \sum_{j=1}^r k_j p^j - \sum_{j=1}^r k_j$$

deci notînd

$$\sigma_{(p)}(\alpha) = \sum_{i=0}^n C_i \quad \sigma_{[p]}(\alpha) = \sum_{j=1}^r k_j \quad (2.3.3.)$$

și ținînd cont că $\sum_{j=1}^r k_j p^j = p \sum_{j=0}^{r-1} k_j p^j$ este tocmai $p(\alpha_{[p]})_{(p)}$ obținem

$$S(p^\alpha) = (p-1) \alpha + \sigma_{[p]}(\alpha) \quad (2.3.4.)$$

Cu ajutorul primei inegalități (2.3.3.) obținem

$$p\alpha_{(p)} = \sum_{i=0}^n C_i (p^{i+1} - 1) + \sum_{i=0}^n C_i$$

sau

$$\frac{p}{p-1}\alpha = \sum_{i=0}^n C_i a_{i+1}(p) + \frac{1}{p-1}\sigma_{(p)}(\alpha)$$

și în consecință avem

$$\alpha = \frac{p-1}{p}(\alpha_{(p)})_{[p]} + \frac{1}{p}\sigma_{(p)}(\alpha) \quad (2.3.5.)$$

unde prin $(\alpha_{(p)})_{[p]}$ am notat numărul obținut scriind pe α în baza (p) și citindu-l în baza $[p]$.

Înlocuind această expresie a lui α în (2.3.4.), obținem

$$S(p^a) = \frac{(p-1)^2}{p}(\alpha_{(p)})_{[p]} + \frac{p-1}{p}\sigma_{(p)}(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha) \quad (2.3.6.)$$

Putem obține și o legătură între $S(p^\alpha)$ și exponentul $e_p(\alpha)$ din formula lui Legendre (2.2.1.). Amintim că $e_p(\alpha)$ este exponentul la care apare numărul prim p în descompunerea în factori a lui α !

Se știe că pe lângă exprimarea (2.2.1) mai avem

$$e_p(a) = \frac{a - \sigma_{(p)}(\alpha)}{p-1} \quad (2.3.7.)$$

deci utilizînd (2.3.5.) deducem

$$e_p(\alpha) = (\alpha_{(p)})_{[p]} - \alpha \quad 2.3.8.$$

O altă formulă pentru $e_p(\alpha)$ poate fi obținută astfel: dacă α dat de prima egalitate (2.3.2.) este

$$\alpha_{(p)} = C_n p^n + C_{n-1} p^{n-1} + \dots + C_1 p + C_0 \quad (2.3.9)$$

atunci cum

$$e_p(\alpha) = [\alpha/p] + [\alpha/p^2] + \dots + [\alpha/p^n] = \\ = (C_n p^{n-1} + C_{n-1} p^{n-2} + \dots + C_1) + \dots + (C_n p + C_{n-1}) + C_n$$

obținem

$$e_p(\alpha) = ((\alpha - C_0)_{(p)})_{[p]} = (([\alpha/p])_{(p)})_{[p]} \quad (2.3.10)$$

unde $\alpha_{(p)} = C_n C_{n-1} \dots C_0$ este exprimarea lui α în baza (p) .

Din (2.3.6.) și (2.3.8.) deducem

$$S(p^\alpha) = \frac{(p-1)^2}{p} (e_p(\alpha) + \alpha) + \frac{p-1}{p} \sigma_{[p]}(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha) \quad (2.3.11.)$$

Utilizînd egalitățile (2.3.1.) și (2.3.6.) obținem o legătură între numerele:

$(\alpha_{(p)})_{[p]}$ = numărul α scris în baza (p) și "citit" în baza $[p]$

$(\alpha_{[p]})_{(p)}$ = numărul α scris în baza $[p]$ și "citit" în baza (p)

și anume:

$$p^2(\alpha_{[p]})_{(p)} - (p-1)^2(\alpha_{(p)})_{[p]} = p\sigma_{[p]}(\alpha) + (p-1)\sigma_{(p)}(\alpha) \quad (2.3.12.)$$

Pentru a obține și alte exprimări ale lui observăm că din formula lui Legendre (2.2.1.) rezultă

$$S(p^\alpha) = p(\alpha - i_p(\alpha)) \text{ cu } 0 \leq i_p(\alpha) \leq [(\alpha-1)/p] \quad (2.3.13.)$$

de unde, utilizînd pentru $S(p^\alpha)$ notația echivalentă $S_p(\alpha)$, obținem

$$(1/p)S_p(\alpha) + i_p(\alpha) = \alpha \quad (2.3.14.)$$

și deci pentru fiecare funcție S_p există o funcție i_p astfel încît să avem condiția binară (2.3.13.) pentru a obține identitatea

Pentru a obține exprimări ale funcției i_p observăm că din (2.3.7.) rezultă $\alpha = (p-1)e_p(\alpha) + \sigma_{(p)}(\alpha)$, iar din (2.3.4.) obținem

$$\alpha = (S_p(\alpha) - \sigma_{[p]}(\alpha))/(p-1), \text{ deci}$$

$$(p-1)e_p(\alpha) + \sigma_{(p)}(\alpha) = (S_p(\alpha) - \sigma_{[p]}(\alpha))/(p-1)$$

$$\text{sau } S(p^\alpha) = (p-1)^2 e_p(\alpha) + (p-1) \sigma_{(p)}(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha) \quad (2.3.15.)$$

Revenind la funcția i_p , observăm că din (2.3.4.) și (2.3.14.) rezultă

$$i_p(\alpha) = (\alpha - \sigma_{[p]}(\alpha))/p \quad (2.3.16.)$$

prin urmare putem spune că există o complementaritate între exprimarea lui $e_p(\alpha)$ prin egalitatea (2.3.7.) și exprimarea de mai sus a lui $i_p(\alpha)$.

Putem găsi și alte legături între i_p și e_p . De exemplu din (2.3.7.) și (2.3.16.) obținem

$$i_p(\alpha) = \frac{(p-1)e_p(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha) - \sigma_{[p]}(\alpha)}{p} \quad (2.3.17.)$$

De asemenea, din $\alpha_{[p]} = k_v k_{v-1} \dots k_1 = k_v (p^{v-1} + p^{v-2} + \dots + 1) + k_{v-1}(p^{v-2} + p^{v-3} + \dots + 1) + \dots + k_2(p+1) + k_1$, obținem

$$\alpha = (k_v p^{v-1} + k_{v-1} p^{v-2} + \dots + k_2 p + k_1) + k_v (p^{v-2} + p^{v-3} + \dots + 1) + k_{v-1}(p^{v-3} + p^{v-4} + \dots + 1) + \dots + k_3(p+1) + k_2 = (\alpha_{[p]})_{(p)} + [\alpha/p] - [(v_{[p]}(\alpha))/p]$$

deoarece

$$[\alpha/p] = k_v(p^{v-2} + p^{v-3} + \dots + p + 1) + k_v/p + k_{v-1}(p^{v-3} + p^{v-4} + \dots + p + 1) + k_{v-1}/p + \dots + k_3(p+1) + k_3/p + k_2 + k_2/p + k_1/p$$

$$\text{iar } [n + x] = n + [x]$$

Obținem

$$\alpha = (\alpha_{[p]})_{(p)} + [\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] \quad (2.3.18)$$

Rezultă că putem scrie

$$S(p^\alpha) = p(\alpha - ([\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p])) \quad (2.3.19)$$

iar din (2.3.16.) și (2.3.19.) deducem

$$i_p(\alpha) = [\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] \quad (2.3.20)$$

relație care se poate obține și direct, din (2.3.16.) ținând cont că dacă:

$$(m-n)/p \in \mathbb{N}$$

atunci

$$(m-n)/p = [m/p] - [n/p]$$

prin urmare

$$(\alpha - \sigma_{[p]}(\alpha))/p = [\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p]$$

O altă exprimare a lui $i_p(\alpha)$ se obține din (2.3.1.) și (2.3.16.) sau din (2.3.18) și (2.3.20) și anume

$$i_p(\alpha) = \alpha - (\alpha_{[p]})_{(p)} \quad (2.3.21.)$$

În sfârșit, din definiția lui S rezultă

$$S_p(e_p(\alpha)) = p[\alpha/p] = \alpha - \alpha_p$$

unde α_p este restul împărțirii lui α la p , [i de asemenea

$$e_p(S_p(\alpha)) \geq \alpha, \quad e_p(S_p(\alpha) - 1) < \alpha \quad (2.3.22.)$$

deci

$$\frac{S_p(\alpha) - \sigma_{(p)}(S_p(\alpha))}{p-1} \geq \alpha$$

$$\frac{S_p(\alpha) - 1 - \sigma_{(p)}(S_p(\alpha) - 1)}{p-1} < \alpha$$

Utilizînd (2.3.4.) rezultă că $S_p(\alpha)$ este soluția unică a sistemului

$$\sigma_{(p)}(x) \leq \sigma_{[p]}(\alpha) \leq \sigma_{(p)}(x-1) + 1 \quad (2.3.23.)$$

În finalul acestui paragraf vom reveni la funcția i_p pentru a prezenta o comportare asimptotică a ei.

Din condițiile pe care le îndeplinește această funcție în (2.3.13) rezultă că notînd

$$\Delta(\alpha, p) = [(\alpha-1)/p] - i_p(\alpha)$$

avem $\Delta \geq 0$.

Pentru a calcula pe Δ observăm ca

$$[(\alpha-1)/p] - i_p(\alpha) = [(\alpha-1)/p] - [\alpha/p] + [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] \quad (2.3.24.)$$

și presupunînd $\alpha \in [hp+1, hp+p-1]$, rezulta

$$[(\alpha-1)/p] = [\alpha/p]$$

$$\text{deci } \Delta(\alpha, p) = [(\alpha-1)/p] - i_p(\alpha) = [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] \quad (2.3.25)$$

De asemenea, dacă $\alpha = hp$, atunci

$$[(\alpha-1)/p] = [(hp-1)/p] = h-1$$

în timp ce $[\alpha/p] = h$, deci (2.3.24) devine

$$\Delta(\alpha, p) = [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] - 1 \quad (2.3.26)$$

Analog, dacă $\alpha = hp + p$, obținem

$$[(\alpha-1)/p] = [h + 1 - (1/p)] = h$$

iar $[\alpha/p] = h+1$, deci (2.3.24.) are forma (2.3.26). Pentru orice α pentru care $\Delta(\alpha, p)$ are forma (2.3.25.) sau (2.3.26.) deducem că $\Delta(\alpha, p)$ este maxim dacă $\sigma_{[p]}(\alpha)$ este maxim, deci pentru $\alpha = \alpha_M$, unde

$$\alpha_M = \underbrace{((p-1)(p-1) \dots (p-1) p [p])}_{v \text{ termeni}}$$

Avem deci

$$\begin{aligned} \alpha_M &= (p-1)a_v(p) + (p-1)a_{v-1}(p) + \dots + (p-1)a_2(p) + p = \\ &= (p-1) [(p^v-1)/(p-1)] + (p^{v-1}-1)/(p-1) + \dots + (p^2-1)/(p-1) + p = \\ &= (p^v + p^{v-1} + \dots + p^2)p - (v-1) = p a_v(p) - (v-1) \end{aligned}$$

Rezultă că a_M nu este multiplu de p dacă și numai dacă $v-1$ nu este multiplu de p .

În acest caz

$$\sigma_{[p]}(\alpha_M) = (v-1)(p-1) + p = pv - v + 1$$

și

$$\Delta(\alpha_M, p) = [\sigma_{[p]}(\alpha_M)/p] = [v - (v-1)/p] = v - [(v-1)/p]$$

Deci

$$i_p(\alpha_M) \geq [(\alpha_M-1)/p] - t$$

$$\text{adica } i_p(\alpha_M) \in \left[[(\alpha_M-1)/p] - t, [(\alpha_M-1)/p] \right].$$

Dacă $v-1 \in (hp, hp+p)$, obținem $[(v-1)/p] = h$ și

$$h(p-1) + 1 < \Delta(\alpha_M) < h(p-1) + p + 1$$

deci

$$\lim_{\alpha_M \rightarrow \infty} \Delta(\alpha_M, p) = \infty$$

Observăm de asemenea că

$$[(\alpha_M - 1)/p] = a_v(p) - [(v-1)/p] = (p^{v+1} - 1)/(p-1) - [(v-1)/p] \in [(p^{hp+1} - 1)/(p-1) - h, (p^{hp+p+1} - 1)/(p-1) - h]$$

Așadar, dacă $\alpha_M \rightarrow \infty$ ca p^x , atunci $\Delta(\alpha_M, p) \rightarrow \infty$ ca x .

De asemenea din

$$\frac{i_p(\alpha_M)}{\left[\frac{\alpha_M - 1}{p}\right]} = \frac{a_v(p) - v}{a_v(p) - \left[\frac{v-2}{p}\right]} \rightarrow 1$$

rezultă

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{i_p(\alpha)}{\left[\frac{\alpha - 1}{p}\right]} = 1$$

2.4. Legături între funcția S și unele funcții numerice clasice

În acest pragraf vom prezenta legături ale funcției S cu funcția lui Euler, funcția lui von Mangolt, funcția lui Riemann, funcția Π .

2.4.1. Definiție. Funcția lui von Mangolt se definește prin

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{dacă } n = p^m \\ 0, & \text{dacă } n \neq p^m \end{cases} \quad (2.4.1.)$$

Se știe că această funcție nu este multiplicativă, adică din $(n, m) = 1$ nu rezultă $\Lambda(n, m) = \Lambda(n) \cdot \Lambda(m)$

De exemplu, pentru $n = 3$ și $m = 5$ avem $\Lambda(n) = \ln 3$, $\Lambda(m) = \ln 5$ și $\Lambda(mn) = \Lambda(15) = 0$

Despre această funcție se cunosc următoarele rezultate:

2.4.2. Teoremă. Avem

$$(i) \sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$$

$$(ii) \Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d}$$

unde μ este funcția lui Möebius, definită prin

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 1 \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este divizibil cu un pătrat} \\ (-1)^k, & \text{dacă } n = p_1 p_2 \dots p_k \end{cases} \quad (2.4.2.)$$

2.4.3. Definiție. Funcția $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin relația

$$\psi(x) = \sum_{p^a \leq x} \ln p \quad (2.4.3)$$

Dintre proprietățile acestei funcții menționăm doar două, de care avem nevoie în continuare, și anume:

2.4.4. Teoremă. Funcția ψ satisface

$$(i) \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

$$(ii) \psi(x) = \ln[1, 2, 3, \dots, [x]]$$

unde cu paranteză dreaptă am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor 1, 2, ... [x].

Se știe că pe mulțimea N^* putem considera două structuri lacticeale și anume

$$\mathcal{N}_0 = (N^*, \wedge, \vee), \mathcal{N}_d = (N^*, \wedge_d, \vee_d)$$

unde $\wedge = \min$, $\vee = \max$

$\wedge_d = \text{c.m.m.d.c.}$ (notat pînă acum cu paranteze rotunde)

$\vee_d = \text{c.m.m.d.c.}$ (notat pînă acum cu paranteze drepte)

Ordinea indusă pe N^* de structura \mathcal{N}_0 o vom nota cu \leq , iar ordinea indusă pe N^* de structura \mathcal{N}_d o notăm cu \leq_d , se știe că

$$n_1 \leq_d n_2 \Leftrightarrow n_1 \text{ divide } n_2 (\Leftrightarrow n_1/n_2) \quad (2.4.4.)$$

În virtutea acestor considerații putem spune că funcția S este definită pe laticia \mathcal{N}_d cu valori în laticia \mathcal{N}

Aceasta în virtutea proprietății

$$S(n_1 \vee_d n_2) = S(n_1) \vee S(n_2) \quad (2.4.5.)$$

pe care o are S .

În felul acesta S devine o funcție monotonă, în sensul că

$$n_1 \leq_d n_2 \Rightarrow S(n_1) \leq S(n_2) \quad (2.4.6.)$$

Se știe $[L_2]$ că dacă $(\mathcal{V}, \wedge, \vee)$ este o latică finită, $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cu ordinea indusă \leq , atunci pentru orice funcție $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, funcția generatoare atașată este definită prin

$$F(n) = \sum_{y \leq n} f(y) \quad (2.4.7)$$

Acum putem reveni la funcția lui Mangolt și să observăm că notînd cu F^d funcția generatoare atașată funcției numerice f în laticia \mathcal{N}_d , și cu F^0 funcția generatoare atașată lui f în laticia \mathcal{N}_0 în virtutea teoremei 2.4.2. avem pe de-o parte:

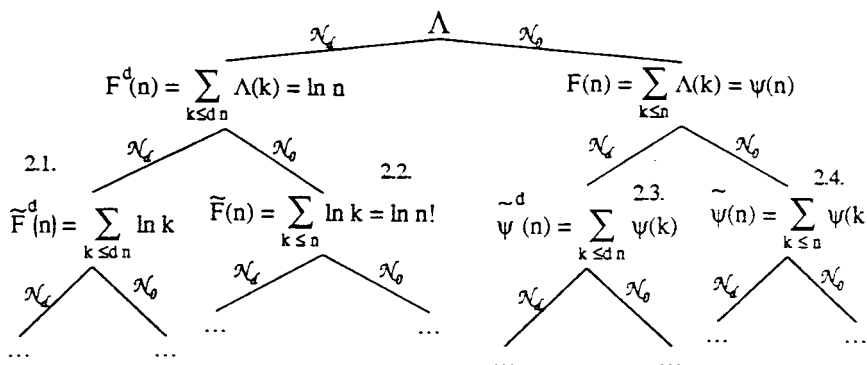
$$F^d(n) = \sum_{k \leq_d n} \Lambda(k) = \ln n \quad (2.4.8.)$$

iar pe de altă parte se poate constata cu ușurință că funcția generatoare atașată aceleiași funcții a lui Mangolt, însă în laticea \mathcal{N}_0 este

$$F^0(n) = \sum_{k \leq n} \Lambda(k) = \psi(n) = \ln [1, 2, \dots, n]$$

Observăm deci că fiecărei funcții numerice f îi putem atașa două funcții generatoare și anume funcțiile F^0 și F^d .

Pe baza acestor considerații obținem diagrama următoare:



Observăm de aici că definiția lui S este într-o strânsă legătură cu egalitățile (1.1.) și (2.2.).

Considerînd drept f funcția lui Mangolt, din egalitățile

$$[1, 2, \dots, n] = e^{-F(n)} = e^{-f(1)} \cdot e^{-f(2)} \cdot \dots \cdot e^{-f(n)} = e^{-\psi(n)}$$

$$n! = e^{F(n)} = e^{F^d(1)} \cdot e^{F^d(2)} \cdot \dots \cdot e^{F^d(n)}$$

utilizînd și definiția funcției S , suntem conduși la a considera funcții numerice de forma

$$\gamma(n) = \min \{m / n \leq_d [1, 2, \dots, m]\} \quad (2.4.9.)$$

asupra cărora vom reveni într-un paragraf care urmează. Revenind la ideea legăturii dintre funcția S și funcții numerice clasice, pentru a prezenta o legătură dintre S și funcția lui Euler amintim că dacă p este un număr prim, atunci

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \quad (2.4.10.)$$

iar pentru $\alpha \geq 2$ avem

$$p^{\alpha-1} = (p-1)a_{\alpha-1}(p) + 1 \text{ deci } \sigma_{[p]}(p^{\alpha-1}) = p$$

Utilizînd egalitatea (2.3.4.) rezult

$$S_p(p^{\alpha-1}) = (p-1)p^{\alpha-1} + \sigma_{[p]}(p^{\alpha-1}) = \varphi(p^\alpha) + p \quad (2.4.11.)$$

2.4.5. Definiție. Seria Dirichlet atașată unei funcții

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

este

$$D_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} \quad (2.4.12.)$$

care pentru un anumit $z = x + iy$ poate fi convergentă sau nu.

Cea mai simplă serie Dirichlet este

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (2.4.13.)$$

numită funcția lui Riemann sau funcția zeta, care este convergentă pentru $\text{Re} z > 1$.

În cele ce urmează vom presupune că $Z \in \mathbb{R}$, deci $z = x$.

2.4.6. Teoremă. Dacă

$$n = \prod_{i=1}^{t_n} p_i^{\alpha_{i_n}}$$

este descompunerea în factori primi a numărului natural n , atunci între funcțiile S_p și funcția lui Riemann avem următoarea legătură

$$\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^{t_n} \frac{S_{p_i}(p_i^{\alpha_{i_n}-1}) - p_i}{p_i^{x \alpha_{i_n}}} \quad (2.4.14.)$$

Demonstratie:

Se știe că seria Dirichet atasată funcției lui Mobius este

$$D_{\mu}(z) = \frac{1}{\zeta(z)} \quad \text{pentru } \text{Re}(z) > 1$$

iar seria Dirichet atasată funcției lui Euler este

$$D_{\sigma}(z) = \frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} \quad \text{pentru } \text{Re}(z) > 2$$

Avem de asemenea

$$D_{\xi}(z) = \zeta^2(z) \quad \text{pentru } \text{Re}(z) > 1$$

unde $\xi(n)$ este numărul divizorilor lui n , inclusiv 1 și n .

Mai general:

$$D_{\tau_k}(z) = \zeta(z) * \zeta(z-k), \quad \text{pentru } \text{Re}(z) > 1, \text{Re}(z) > k-1$$

unde $\tau_k(n)$ este suma puterilor de ordin k a divizorilor lui n

Vom nota $\tau(n)$ în loc de $\tau_1(n)$, iar $\tau_0(n) = \xi(n)$.

După cum am mai spus, între funcțiile ϕ și ζ există legătura

$$\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n^x} \quad (2.4.15.)$$

În plus, avem

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t_n} \varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{t_n} (Sp_i(p_i^{\alpha_i-1}) - p_i)$$

și înlocuind această expresie a lui $\varphi(n)$ în (2.4.15.) obținem egalitatea din enunț.

Pentru funcția S avem

$$D_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^x}$$

și notînd cu $D_{F_S^d}$ seria Diriclet atașată funcției următoare F_S^d deducem

2.4.6. Teoremă. Pentru orice $x > 2$ avem

$$(i) \quad \zeta(x) \leq D_S(x) \leq \zeta(x-1)$$

$$(ii) \quad \zeta^2(x) \leq D_{F_S^d}(x) \leq \zeta(x) \cdot \zeta(x-1)$$

Demonstrație. (i) Inegalitățile rezultă din aceea că avem

$$1 \leq S(n) \leq n \quad (2.4.16.)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) Avem

$$\begin{aligned} \zeta(x) D_S(x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(k)}{k^x} \right) = \\ &= S(1) + \frac{S(1) + S(2)}{2^x} + \frac{S(1) + S(3)}{3^x} + \frac{S(1) + S(2) + S(4)}{4^x} + \dots = D_{F_S^d}(x) \end{aligned}$$

și inegalitățile rezultă utilizînd pe (i).

Să observăm că (ii) este echivalent cu

$$D_{\tau}(x) \leq D_{F_S^d}(x) \leq D_{\sigma}(x)$$

inegalitate care poate fi dedusă și observînd că din (2.4.16.) se obține

$$\sum_{k \leq d_n} 1 \leq \sum_{k \leq d_n} S(k) \leq \sum_{k \leq d_n} k$$

prin urmare avem

$$\tau(n) \leq F_S^d(n) \leq \sigma(n) \quad (2.4.17)$$

Remarcăm că în $[G_S]$ s-a arătat că funcția sumatoare F_S^d satisface chiar inegalitatea

$$\tau(n) \leq F_S^d(n) \leq n + 4$$

Pentru a prezenta alte inegalități satisfăcute de seria Dirichlet D_S amintim mai întâi că dacă f și g sunt două funcții de o variabilă reală, cu creșteri nemărginite, dacă $f(x) > 0$ și dacă există constantele C_1 și C_2 astfel încât

$$|f(x)| < C_1 f(x) \text{ pentru orice } x > C_2$$

atunci scriem

$$f(x) = O(g(x))$$

(f este de ordinul lui g).

În mod special se notează cu $O(1)$ orice funcție care rămîne mărginită pentru $x > C_2$. Dacă raportul $f(x)/g(x)$ tinde la zero pentru x tinzînd la infinit, notăm

$$f(x) = o(g(x))$$

În mod special se notează cu $o(1)$ orice funcție care tinde la zero cînd x tinde la infinit.

Evident că

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$

dar nu și reciproc.

2.4.7. Teoremă. Funcția lui Riemann satisface următoarele egalități:

$$(i) \zeta(z) = 1/(z-1) + O(1)$$

$$(ii) \ln \zeta(z) = \ln(1/(z-1)) + O(z-1)$$

$$(iii) \zeta'(z) = -1/(z-1)^2 + O(1)$$

pentru orice număr complex Z , unde prin $O(1)$ am notat o funcție mărginită.

Utilizînd teoremele (2.4.6.) și (2.4.7.) obținem:

2.4.8. Teoremă. Seria Dirichlet D_S atașată funcției S și derivata sa D'_S satisfac inegalitățile:

$$(i) \quad 1/(x-1) + O(1) \leq D_S(x) \leq 1/(x-2) + O(1)$$

$$(ii) \quad -1/(x-1)^2 + O(1) \leq D'_S(x) \leq -1/(x-2)^2 + O(1)$$

Notăția consacrată pentru numărul numerelor prime mai mici decât x este $\Pi(x)$. În $[S_8]$ se dă o legătură între funcțiile Π și S .

Plecînd de la observația că $S(x) \leq n$ pentru orice n și că pentru $n > 4$ avem $S(n) = n$ dacă și numai dacă n este număr prim, se obține

$$\Pi(x) = \sum_{k=2}^{[x]} \left[\frac{S(k)}{k} \right] - 1$$

2.5. Funcția S ca funcție sumatoare

Fiind dată o funcție numerică, formula de inversiune a lui Möbius permite, după cum se știe, scrierea funcției f cu ajutorul funcției sumatoare F^d și anume

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) \quad (2.5.1.)$$

dacă

$$F^d(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Avînd în vedere acest aspect, putem considera orice funcție numerică f în două situații:

- 1) în situația de a-i explicita funcția sumatoare F
- 2) în situația ca f să fie considerată funcție sumatoare a unei funcții numerice g .

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \leftarrow f \rightarrow F^d(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad (2.5.2.)$$

De exemplu, pentru $f(n) = n$ (aplicația identică) avem

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \varphi(n); \quad F^d(n) = \sum_{d|n} d = \sigma(d) \quad (2.5.3.)$$

Considerînd cazul particular cînd f este funcția S , explicitarea funcției sumatoare F_S^d este dificilă în general deoarece

$$F_S^d(n) = \sum_{d|n} S(d) = \sum_{d|n} \max \left(S \left(\delta_i^{\beta_i} \right) \right) \quad (2.5.4.)$$

cu δ_i factori primi ai lui d .

Totuși, în două cazuri particulare exprimarea lui $F_S^d(n)$ este mai accesibilă, și anume pentru $n = p^\alpha$ și pentru n număr liber de pătrate. În primul caz avem

$$\begin{aligned} F(p^\alpha) &= \sum_{j=1}^{\alpha} S(p^j) = \sum_{j=1}^{\alpha} ((p-1)j + \sigma_{[p]}(j)) = \\ &= (p-1) \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \sum_{j=1}^{\alpha} \sigma_{[p]}(j) \end{aligned} \quad (2.5.5.)$$

Fie acum $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ un număr liber de pătrate, cu $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ numere prime. Desigur

$$S(n) = p^k \text{ și}$$

$$F_S^d(1) = S(1) = 1$$

$$F_S^d(p_1) = S(1) + S(p_1) = 1 + p_1$$

$$F_S^d(p_1 \cdot p_2) = S(1) + S(p_1) + S(p_2) + S(p_1 \cdot p_2) = 1 + p_1 + 2p_2$$

$$F_S^d(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = 1 + p_1 + 2p_2 + 2^2 p_3 = F(p_1 \cdot p_2) + 2^2 p_3$$

și rezultă

$$F_S^d(n) = 1 + F_S^d(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}) + 2^{k-1} p_k$$

de unde se obține

$$F_S^d(n) = 1 + \sum_{i=1}^k 2^{i-1} p_i \quad (2.5.8.)$$

Să observăm că deoarece $S(n) = p_k$, înlocuind valorile lui $F_S^d(t)$ date de (2.5.8.) în egalitate

$$S(n) = \sum_{r|n} \mu(r) F_S^d(t) \quad (2.5.9.)$$

aparent obținem o exprimare a lui p_k în funcție de numere prime precedente. În realitate (2.5.9.) este o identitate în care după reducerea termenilor asemenea coeficientul fiecărui număr prim este nul.

În $[G_5]$ se rezolvă ecuația

$$F_S^d(n) = n \quad (2.5.9.i)$$

în ipoteza

$$S(1) = 0 \quad (2.5.9.ii)$$

2.5.1. Propoziție. În ipoteza 92.5.9.s) ecuația (2.5.9.i) are doar soluțiile

a) n număr prim

b) $n \in \{9, 16, 24\}$

Demonstrație. Deoarece

$$F_S^d(n) = \sum_{d|n} S(d) \quad (2.5.9. iii)$$

în ipoteza făcută se observă că orice număr prim este soluție a ecuației. Să presupunem că

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$$

este descompunerea în factori primi a numărului compus $n \geq 4$, unde numerele prime p_i și exponenții $r_i \in \mathbb{N}^*$ satisfac condițiile

(c1) $p_i r_i > p_i r_i$ pentru orice $i \in \{2, 3, \dots, k\}$

(c2) $p_i < p_{i+1}$ pentru $i \in \{2, 3, \dots, k-1\}$, ori de cîte ori avem $k \geq 3$.

Să presupunem mai întîi $k = 1$ și $r_1 \geq 2$. Datorită inegalității

$$S(p_1^{s_1}) \leq p_1 s_1$$

observăm că avem

$$\begin{aligned} p_1^{r_1} = n = F_S^d(n) &= F_S^d(p_1^{r_1}) = \sum_{s_1=0}^{r_1} S(p_1^{s_1}) \leq \sum_{s_1=0}^{r_1} p_1 s_1 = \\ &= p_1 r_1 (r_1 + 1)/2 \end{aligned}$$

deci

$$2 p_1^{r_1-1} \leq r_1 (r_1 + 1) \text{ dacă } r_1 \geq 2 \text{ (2.5.9.iv)}$$

Dacă $p_1 \geq 5$, această inegalitate nu este satisfăcută pentru $r_1 \geq 2$,

deci trebuie să avem $p_1 > 5$. Cu alte cuvinte, $p_1 \in \{2, 3\}$.

Cu ajutorul inegalității (2.5.9iv) putem găsi un supremum prentu r_1 , supremum ce depinde de valorile lui p_1 .

Dacă $p_1 = 2$, rezultă că r_1 poate lua doar valorile 2, 3, 4 și pentru $p_1 = 3$ singura valoare posibilă a lui r_1 este 2.

Deci sunt cel mult patru soluții ale ecuației (2.5.9. i) dacă n este de forma $n = p_1^{r_1}$, și anume $n \in \{4, 8, 9, 16\}$.

Calculînd pe $F_S^d(n)$ în fiecare din aceste cazuri obținem

$$F_S^d(4) = 6, F_S^d(8) = 10; F_S^d(9) = 9; F_S^d(16) = 16$$

În consecință, soluții sunt $n = 9$ și $n = 16$.

Să presupunem acum $k \geq 2$.

Scriind în ecuația (2.5.9. i) pe n descompus în factori primi, obținem

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^k p_i^{r_i} &= F_S^d \left(\prod_{i=1}^k p_i^{r_i} \right) = \sum_{d|n} S(d) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \dots \sum_{s_k=0}^{r_k} S \left(\prod_{i=1}^k p_i^{s_i} \right) = \\
&= \sum_{s_1=0}^{r_1} \dots \sum_{s_k=0}^{r_k} \max \{ S(p_1^{s_1}), S(p_2^{s_2}), \dots, S(p_k^{s_k}) \} \\
&\leq \sum_{s_1=0}^{r_1} \dots \sum_{s_k=0}^{r_k} \max \{ p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, \dots, p_k^{s_k} \} < \\
&< \sum_{s_1=0}^{r_1} \dots \sum_{s_k=0}^{r_k} \max \{ p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \dots, p_k^{r_k} \} = \\
&= \sum_{s_1=0}^{r_1} \dots \sum_{s_k=0}^{r_k} p_1^{r_1} \leq p_1^{r_1} \prod_{i=1}^k (r_i + 1)
\end{aligned}$$

am obținut deci inegalitatea

$$\prod_{i=1}^k \frac{p_i^{r_i}}{r_i + 1} < \frac{p_1^{r_1} (r_1 + 1)}{p_1^{r_1}} = \frac{r_1 (r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \quad (2.5.9.v)$$

Suntem astfel conduși la studiul funcțiilor

$$f(x) = \frac{a^x}{x+1} \quad \text{și} \quad g(x) = \frac{x(x+1)}{b^{x-1}}, \quad x \in [0, \infty), \text{ unde } a, b \geq 2$$

Derivatele acestor două funcții sunt

$$f'(x) = \frac{a^x}{(x+1)^2} [(x+1) \ln a - 1] \quad \text{și}$$

$$g'(x) = \frac{(-\ln b)x^2 + (2 - \ln b)x + 1}{b^{x-1}}$$

Deoarece $(x+1) \ln a - 1 \geq (1+1) \ln 2 - 1 = 2 \ln 2 - 1 > 0$, rezultă

că $f'(x) > 0$ pentru $x \geq 1$.

În plus, maximul funcției se obține pentru

$$x = \max \left\{ 1, \frac{2 - \ln b + \sqrt{(\ln b)^2 + 4}}{2 \ln b} \right\}$$

Notînd

$$\hat{x} = \frac{2 - \ln b + \sqrt{(\ln b)^2 + 4}}{2 \ln b}$$

deducem

$$\sqrt{(\ln b)^2 + 4} < \ln b + 2 \text{ pentru } b \geq 2$$

de unde rezultă

$$\hat{x} < \frac{(2 - \ln b)(2 + \ln b)}{2 \ln b} = \frac{2}{\ln b} \leq \frac{2}{\ln 2} < 3$$

Să observăm că avem și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

Rezultă că

$$\frac{p_1^{r_1}}{r_1 + 1} \text{ crește, pentru } r_1 \in \mathbb{N}^*, \text{ de la } \frac{p_1}{2} \text{ la } \infty$$

și în plus

$$\frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \max \left\{ 2, \frac{6}{p_1}, \frac{12}{p_1^2} \right\} = \max \left\{ 2, \frac{6}{p_1} \right\} \leq 3$$

deoarece

$$\frac{6}{p_1} \geq \frac{12}{p_1^2} \quad \text{dacă } p_1 \geq 2$$

Utilizînd relația (2.5.9.v) obținem

$$\prod_{i=2}^k \frac{p_i}{2} \leq \prod_{i=2}^k \frac{p_i^{r_i}}{r_i + 1} < \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{2^{r_1 - 1}} \leq 3 \quad (2.5.9.vi)$$

pentru orice $r_1 \in \mathbb{N}^*$.

Reținem deci că

$$\prod_{i=2}^k \frac{p_i}{2} < 3$$

Dar avem și

$$\prod_{i=2}^4 \frac{p_i}{2} \geq \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4} > 3$$

de unde rezultă că trebuie să avem $k \leq 3$.

Pentru $k = 2$, din (2.5.9.v) și (2.5.9.vi) deducem

$$\frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \quad \text{și} \quad \frac{p_2}{2} < 3$$

deci $p_2 < 6$.

Dacă presupunem că $r_2 \geq 3$, deducem

$$p_1 \cdot p_2 \geq 2 \cdot 3 = 6, \text{ adică } p_2 > 6/p_1.$$

și obținem

$$\frac{p_2^3}{4} \leq \frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} < \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \max \left\{ 2, \frac{6}{p_1} \right\} \leq \max \{ 2, p_2 \} = p_2$$

deci $p_2^2 < 4$, ceea ce este o contradicție.

Așadar, avem $r_2 \leq 2$. Deci

$$p_2 \in \{2, 3, 5\}, r_2 \in \{1, 2\}$$

Mai mult, din

$$1 \leq \frac{p_2}{2} \leq \frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{2^{r_1 - 1}}$$

rezultă $r_1 \leq 6$.

În consecință, fixînd valorile lui p_2 și r_2 inegalitățile

$$\frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} > \frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} \quad \text{și} \quad p_1 r_1 > p_2 r_2$$

ne dau suficiente informații pentru a determina un supremum pentru r_1 (mai mic decât șapte) pentru fiecare valoare a lui p_1 .

Rezultatele sunt date în tabelul următor.

p_2	r_2	p_1	r_1	$n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}$	$F_S^d(n)$	Dacă $F_S^d(n)=n$, atunci
2	1	3	$1 \leq r_1 \leq 3$	$2 \cdot 3^{r_1}$	$2+3r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	5	$1 \leq r_1 \leq 2$	$2 \cdot 5^{r_1}$	$2+5r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	$p_1 \geq 7$	1	$2 p_1$	$2+2 p_1$	$0 = 2$
2	2	3	2	36	34	$34 = 36$
2	2	$p_1 \geq 5$	1	$4 p_1$	$3 p_1 + 6$	$p_1 = 6$
3	1	2	$2 \leq r_1 \leq 5$	$3 \cdot 2^{r_1}$	$2r_1^2 - 2r_1 + 12$	$r_1 = 3$
3	1	$p_1 \geq 5$	1	$3 p_1$	$2 p + 3$	$p_1 = 3$
3	1	2	3	40	30	$30 = 40$

Din acest tabel deducem că trebuie să avem

$$n = 3 \cdot 2^{r_1} \text{ sau } r_1 = 3$$

deci $n = 3 \cdot 2^3 = 24$, adică $n = 24$ este singura soluție a ecuației (2.5.9.i) pentru $k = 2$.

În sfârșit, să presupunem $k = 3$; atunci deoarece

$$(p_2/2)(p_2/2) < 3$$

rezultă $p_2 \cdot p_3 < 12$, deci $p_2 = 2$ și $p_3 \in \{3, 5\}$.

Deoarece

$$\frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{3^{r_1 - 1}} \leq 2 \quad (2.5.9.vii)$$

utilizînd (2.5.9.vi) obținem $p_2 = 3$.

De asemenea din (2.5.9.vi) și (2.5.9.vii) obținem

$$\frac{2^{r_2}}{r_2 + 1} \cdot \frac{3^{r_3}}{r_3 + 1} < 2$$

și deoarece membrul stâng al acestei inegalități este un produs de două funcții strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deducem că singurele valori posibile pentru r_2 și r_3 sunt $r_2 = r_3 = 1$.

Introducând aceste valori în (2.5.5.v) obținem

$$\frac{3}{2} < \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{5^{r_1 - 1}}$$

de unde rezultă $r_1 = 1$.

În consecință, ecuația (2.5.9.i) este satisfăcută dacă și numai dacă $n = 2 \cdot 3 \cdot p_1 = 6p_1$

Dar

$$\begin{aligned} 6p_1 &= F_S^d(6p_1) = S(1) + S(2) + S(3) + S(6) + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 S(2^i 3^j p_1) = \\ &= 8 + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \max \{ S(2^i 3^j), S(p_1) \} = 8 + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \max \{ S(2^i 3^j), p_1 \} = 8 + 4p_1 \end{aligned}$$

deoarece $S(2^i 3^j) \leq 3 < p_1$ pentru $i, j \in \{0, 1\}$ și deci $p_1 = 4$, ceea ce contrazice presupunerea $p_1 \geq 5$.

Rezultă că ecuația avută în vedere nu are soluții pentru $k = 3$ și propoziția este demonstrată.

Consecință. Soluțiile inegalității

$$F_S^d(n) > n \quad (2.5.9.viii)$$

se obțin ținând cont de faptul că (2.5.9.viii) implică (2.5.9.v)

Deci

$$F_S^d(n) > \Leftrightarrow n \in \{8, 12, 18, 20\} \text{ sau } n = 2p, \text{ cu } p \text{ număr prim.}$$

În consecință, avem

$F_S^d(n) \leq n + 4$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Mai mult, întrucât avem soluțiile inecuației

$$F_S^d(n) \geq n$$

putem deduce și soluțiile inecuației $F_S^d(n) < n$.

Amintim că în $[S_0]$ se studiază limita șirului

$$T(n) = 1 - \ln F_S^d(n) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_{S(p_i)}^d(k)}$$

ce conține funcția sumatoare. Se demonstrează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = -\infty$$

În continuarea acestui paragraf vom avea în vedere săgeata spre stînga din (2.5.2.), adică vom privi pe S ca o funcție sumatoare a unei funcții s , pe care o vom determina.

Avem deci, prin definiție,

$$s(n) = \sum_{d|n} \mu(d) S\left(\frac{n}{d}\right)$$

Dacă descompunerea lui n în factori primi este

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$$

rezultă că

$$s(n) = \sum_{p_1 p_2 \dots p_r} (-1)^r S\left(\frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r}\right)$$

Să considerăm că

$$S(n) = \max S(p_i^{\alpha_i}) = S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}) \quad (2.5.10.)$$

Distingem următoarele cazuri:

$$(a1) \quad S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}-1}) \geq S(p_i^{\alpha_i}) \text{ pentru } i \neq i_0$$

În acest caz observăm că divizorii d ai lui n pentru care $\mu(d) \neq 0$ sunt de forma $d = 1$ sau $d = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}$. Un divizor de forma a doua poate să conțină pe p_{i_0} sau nu, deci utilizînd (2.5.10) rezultă

$$s(n) = S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}) \left(1 - C_{t-1}^1 + C_{t-1}^2 - \dots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^{t-1} \right) + S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}) \left(-1 + C_{t-1}^1 - C_{t-1}^2 + \dots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^{t-1} \right)$$

de unde rezultă că $s(n) = 0$ pentru $t \geq 2$ sau dacă

$$S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}) = S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}-1}) \quad \text{și } s(n) = p_{i_0} \text{ în celelalte cazuri.}$$

(a2) dacă există j_0 astfel încît

$$S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}-1}) < S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}}) \text{ și } S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}-1}) \geq S(p_i^{\alpha_i}) \text{ pentru } i \neq i_0, j_0$$

În acest caz, presupunînd în plus că

$$S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}}) = \max \left\{ S(p_j^{\alpha_j}) / S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}-1}) < S(p_j^{\alpha_j}) \right\}$$

obținem

$$\begin{aligned} s(n) = & S(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}) \left(1 - C_{t-1}^1 + C_{t-1}^2 - \dots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^{t-1} \right) + \\ & + S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}}) \left(-1 + C_{t-2}^1 - C_{t-2}^2 + \dots + (-1)^{t-2} C_{t-2}^{t-2} \right) + \\ & + S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}-1}) \left(1 - C_{t-2}^1 + C_{t-2}^2 - \dots + (-1)^{t-2} C_{t-2}^{t-2} \right) \end{aligned}$$

deci $s(n) = 0$ dacă $t \geq 3$ sau dacă $S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}-1}) = S(p_{j_0}^{\alpha_{j_0}})$ și $S(n) = -p_{j_0}$ în celelalte cazuri.

În consecință, observăm că pentru a obține pe $s(n)$ construim, după modelul de mai sus, un șir maximal i_1, i_2, \dots, i_k astfel încît

$$s(n) = S(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}), \quad S(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}-1}) < S(p_{i_2}^{\alpha_{i_2}}), \quad \dots, \quad S(p_{i_{k-1}}^{\alpha_{i_{k-1}}-1}) < S(p_{i_k}^{\alpha_{i_k}})$$

$$s(n) = 0 \text{ dacă } t \geq k + 1 \text{ sau } S(p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}) < S(p_{i_k}^{\alpha_{i_k}-1})$$

$s(n) = (-1)^{k+1} p_{ik}$ în celelalte cazuri.

Deoarece pentru o egalitate de forma $S(p^\alpha) = S(p^{\alpha-1})$ avem

$$S(p^\alpha) = S(p^{\alpha-1}) \Leftrightarrow (p-1)\alpha + \sigma_{[p]}(\alpha) = (p-1)(\alpha-1) + \sigma_{[p]}(\alpha-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{[p]}(\alpha-1) - \sigma_{[p]}(\alpha) = p-1$$

iar $S(p^\alpha) \neq S(p^{\alpha-1}) \Leftrightarrow \sigma_{[p]}(\alpha-1) - \sigma_{[p]}(\alpha) = -1$, notînd deducem că avem

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \geq k+1 \text{ sau } \sigma_{[p]}(\alpha_k-1) - \sigma_{[p]}(\alpha_k) = p_k - 1 \\ (-1)^{k+1} p_k, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Aplicație. Se știe $[L_2]$ că dacă (\mathcal{V}, \wedge, V) este o latice finită cu $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și notăm cu \leq ordinea indusă pe V , iar pentru funcția $f: \mathcal{V} \rightarrow R$ considerăm funcția generatoare, definită prin egalitatea (2.4.7.), atunci dacă notăm

$$g_{ij} = F(x_i \wedge x_j)$$

rezultă

$$\det(g_{ij}) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$$

În $[L_2]$ se arată că acest rezultat poate fi generalizat la o mulțime parțial ordonată, definind

$$g_{ij} = \sum_{\substack{x \leq x_i \\ x \leq x_j}} f(x)$$

Utilizînd aceste rezultate și notînd

$$\Delta(r) = \det(S(i \wedge_j)) \text{ pentru } i, j = \overline{1, r}$$

rezultă că

$$\Delta(r) = s(1) \cdot s(2) \cdot \dots \cdot s(r)$$

deci pentru r suficient de mare (de fapt pentru $r \geq 8$) avem $\Delta(r) = 0$. Mai mult, pentru orice n există r , suficient de mare, astfel încît dacă

$\Delta(n, k) = \det S((n+i) \wedge_d (n+j))$, pentru $i, j = \overline{1, k}$
 să avem $\Delta(n, k) = 0$ pentru $k \geq r$. Aceasta deoarece

$$\Delta(n, k) = \prod_{i=1}^k s(n+i)$$

Avînd în vedere seria Dirichlet D_s atașată funcției s prin egalitatea

$$D_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^x}$$

avem

$$(i) \quad 1 \leq D_s(x) \leq D_{\varphi}(x) \text{ pentru } x > 2$$

$$(ii) \quad 1 \leq D_s(x) \leq \frac{x-1}{e^A(x-2)}, \text{ a fiind o constanta pozitiva.}$$

Demonstrație. (i) Utilizînd regula de înmulțire a seriilor Dirichlet obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(x)} D_s(x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^x} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(k)}{k^x} \right) = \\ &= \frac{\mu(1)S(1) + \frac{\mu(1)S(2) + \mu(2)S(1)}{2^x} + \frac{\mu(1)S(3) + \mu(3)S(1)}{3^x} + \frac{\mu(1)S(4) + \mu(2)S(2) + \mu(4)S(1)}{4^x} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(k)}{k^x} = D_s(x) \end{aligned}$$

și afirmația rezultă ținînd cont de inegalitățile (i) din teorema 2.4.6.

Inegalitățile (ii) rezultă ținînd cont de teorema 2.4.7.

Capitolul 3

Generalizări ale funcției S

3.1. Prelungirea funcției S la mulțimea Q a numerelor raționale

Pentru a obține această prelungire vom defini mai întâi o duală a funcției S.

În $[D_2]$ și $[D_4]$ este pus în evidență un principiu de dualitate cu ajutorul căruia plecând de la o latice dată pe intervalul unitate, să se obțină alte latici pe același interval.

Rezultatele au fost folosite pentru a propune o variantă de spații bitopologice și pentru a introduce un nou punct de vedere pentru studiul mulțimilor fuzzy.

În $[D_3]$ metoda de a obține noi latici pe intervalul unitate este generalizată la o latice oarecare.

În cele ce urmează vom adopta o metodă din $[D_3]$ pentru a construi toate funcțiile legate într-un anumit sens prin dualitate cu funcția Smarandache.

Să observăm că dacă notăm:

$$R_d(n) = \{m / n \leq_d m!\} \quad L_d(n) = \{m / m! \leq_d n\}$$

$$R(n) = \{m / n \leq m!\} \quad L(n) = \{m / m! \leq n\}$$

putem spune că funcția S este definită de tripletul (Λ, \in, R_d) , deoarece

$$S(n) = \Lambda \{m / m \in R_d(n)\}$$

Putem cita toate funcțiile definite cu ajutorul unui triplet (a, b, c) , unde

a este unul dintre simbolurile $V, \Lambda, \overset{d}{V}$, și $\overset{d}{\Lambda}$

b este unul dintre simbolurile \in și \notin

c este una dintre mulțimile $R_d(n)$, $L_d(n)$, $R(n)$ și $L(n)$ definite mai sus.

Nu toate aceste funcții sunt netriviale. După cum am văzut, tripletul (Λ, \in, R_d) definește funcția $S_1(n) = S(n)$, dar tripletul (Λ, \in, L_d) definește funcția

$$S_2(n) = \Lambda \{m / m! \leq_d n\}$$

care este identic egală cu unu.

Multe dintre funcțiile obținute prin această metodă sunt funcții în scară. De exemplu, dacă motăm cu S_3 funcția definită de tripletul (Λ, \in, R) , avem

$$S_3(n) = \Lambda \{m / n \leq m!\}$$

Deci $S_3(n) = m$ dacă și numai dacă

$$n \in [(m-1)! + 1, m!]$$

În cele ce urmează vom acorda o atenție specială funcției S_4 definită de tripletul (V, \in, L_d) .

Avem

$$S_4(n) = V \{m / m! \leq_d n\} \quad (3.1.1.)$$

care este, într-un anumit sens, duala funcției S .

3.1.1. Propoziție. Funcția S_4 satisface

$$S_4(n_1 \overset{d}{\Lambda} n_2) = S_4(n_1) \overset{d}{\Lambda} S_4(n_2) \quad (3.1.2.)$$

deci este un morfism de la $(N^*, \overset{d}{\Lambda})$ la $(N^*, \overset{d}{\Lambda})$.

Demonstrație. Dacă $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ este șirul numerelor prime și

$$n_1 = \prod p_i^{\alpha_i} \quad n_2 = \prod p_i^{\beta_i}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$$

doar un număr finit dintre exponenții α_i și β_i fiind nenuli, obținem

$$n_1 \wedge n_2 = \prod p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

Dacă notăm

$$S_4(n_1 \wedge n_2) = m, S_4(n_i) = m_i, i = 1, 2$$

și presupunem $m_1 \leq m_2$, rezultă că membrul drept din (3.1.2) este $m_1 \wedge m_2$.

Din definiția lui S_4 rezultă că exponentul $e_{p_i}(m)$ la care apare numărul prim p_i în descompunerea în factori alui $m!$ satisface inegalitatea

$$e_{p_i}(m) \leq \min(\alpha_i, \beta_i), i \geq 1$$

și există j astfel încît

$$e_{p_j}(m+1) > \min(\alpha_j, \beta_j).$$

Atunci rezultă că

$$\alpha_i \geq e_{p_i}(m), \beta_i \geq e_{p_i}(m), i \geq 1$$

Avem de asemenea

$$e_{p_i}(m_1) \leq \alpha_i, e_{p_i}(m_2) \leq \beta_i$$

și în plus există h și k astfel încît

$$e_{p_h}(m_1 + 1) > \alpha_h, e_{p_k}(m_2 + 1) > \beta_k$$

Atunci

$$\min(\alpha_i, \beta_i) \geq \min(e_{p_i}(m_1), e_{p_i}(m_2)) = e_{p_i}(m_1)$$

deoarece $m_1 \leq m_2$

Rezultă că $m_1 \leq m$. Dacă presupunem că inegalitatea este strictă, rezultă $m! \leq n_1$, deci există h astfel încît $e_{p_h}(m) > \alpha_h$ și avem contradicția $e_{p_h}(m) > \min(\alpha_h, \beta_h)$

și propoziția este demonstrată.

Observăm că foarte multe dintre valorile lui S_4 sunt egale cu unu.
De exemplu:

$$S_4(2n + 1) = 1$$

și $S_4(n) > 1$ dacă și numai dacă n este număr par.

3.1.2. Propoziție. Fie p_1, p_2, \dots, p_i șirul numerelor prime consecutive și

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_r^{\beta_r}$$

descompunerea numărului $n \in \mathbb{N}^*$ în factori primi astfel încât prima parte a descompunerii conține (eventualele) numere prime consecutive și fie

$$t_i = \begin{cases} S(p_i^{\alpha_i}) - 1 & \text{dacă } e_{p_i}(S(p_i^{\alpha_i})) > \alpha_i \\ S(p_i^{\alpha_i}) + p_i - 1 & \text{dacă } e_{p_i}(S(p_i^{\alpha_i})) = \alpha_i \end{cases} \quad (3.1.3.)$$

Atunci

$$S_4(n) = \min \{t_1, t_2, \dots, t_k, p_{k+1} - 1\} \quad (3.1.4.)$$

Demonstrație. Dacă $e_{p_i}(S(p_i^{\alpha_i})) > \alpha_i$, din definiția funcției S rezultă că $S(p_i^{\alpha_i}) - 1$ este cel mai mare întreg pozitiv m cu proprietatea $e_{p_i}(m) \leq \alpha_i$. De asemenea, dacă $e_{p_i}(S(p_i^{\alpha_i})) = \alpha_i$, atunci $S(p_i^{\alpha_i}) + p_i - 1$ este cel mai mare întreg m cu proprietatea $e_{p_i}(m) = \alpha_i$.

Rezultă că numărul $\min \{t_1, t_2, \dots, t_k, p_{k+1} - 1\}$ este cel mai mare întreg pozitiv m pentru care $e_{p_i}(m!) \leq \alpha_i$ pentru $i = 1, 2, \dots, k$.

3.1.3. Propoziție. Funcția S_4 satisface

$$S_4(n_1 + n_2) \wedge S_4(n_1 \vee n_2) = S_4(n_1) \wedge S_4(n_2)$$

pentru orice $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. Afirmatia rezultă utilizând egalitatea (3.1.2), ținând cont de faptul că

$$(n_1 + n_2) \wedge_d (n_1 \vee_d n_2) = n_1 \wedge_d n_2$$

Înainte de a prelungi funcția S la mulțimea Q a numerelor raționale vom pune în evidență unele proprietăți de morfism pentru alte funcții definite prin triplete (a, b, c) .

3.1.4. Propoziție.

(i) Funcția $S_5: N^* \rightarrow N^*$,

$$S_5(n) = \bigvee_d \{m / m! \leq_d n\}$$

satisface

$$S_5(n_1 \wedge_d n_2) = S_5(n_1) \wedge_d S_5(n_2) = S_5(n_1) \wedge S_5(n_2) \quad (3.1.5.)$$

(ii) Funcția $S_6: N^* \rightarrow N^*$,

$$S_6(n) = \bigvee_d \{m / n \leq_d m!\}$$

satisface

$$S_6(n_1 \bigvee_d n_2) = S_6(n_1) \bigvee_d S_6(n_2) \quad (3.1.6.)$$

(iii) Funcția $S_7: N^* \rightarrow N^*$,

$$S_7(n) = \bigvee_d \{m / m! \leq_d n\}$$

satisface

$$S_7(n_1 \wedge n_2) = S_7(n_1) \wedge S_7(n_2) \quad (3.1.7.)$$

$$S_7(n_1 \vee n_2) = S_7(n_1) \vee S_7(n_2) \quad (3.1.7.)$$

Demonstrație.

(i) fie

$$A = \{a_i / a_i! \leq_d n_1\}; B = \{b_j / b_j! \leq_d n_2\}$$

$$C = \{C_k / C_k! \leq_d n_1 \wedge_d n_2\}$$

Atunci avem $A \subset B$ sau $B \subset A$. Într-adevăr, fie

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_h\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$$

astfel încît $a_i < a_{i+1}$ și $b_j < b_{j+1}$.

Atunci dacă $a_h \leq b_r$, rezultă că $a_i \leq b_r$ pentru $i = \overline{1, h}$, deci

$$a_i! \leq_d b_r! \leq_d n_2.$$

Prin urmare $A \subset B$.

Analog, dacă $b_r \leq a_h$, rezultă $B \subset A$.

Desigur, avem $C = A \cap B$, deci dacă $A \subset B$ rezultă

$$S_5(n_1 \wedge_d n_2) = \bigvee^d C_k = \bigvee^d a_i = S_5(n_1) = \min \{S_5(n_1), S_5(n_2)\} = S_5(n_1) \wedge_d S_5(n_2)$$

Considerînd S_5 definită pe \mathcal{N}_d din (2.7.5.) rezultă că această funcție este monotonă. Dar nu este pe laticea \mathcal{N}_d , deoarece

$$m! < m! + 1 \text{ dar } S_5(m!) = [1, 2, \dots, m] \text{ și } S_5(m!+1) = 1$$

(ii) Să observăm că

$$S_6(n) = \bigvee^d \{m / \exists i \in 1, t \text{ astfel ca } e_{pi}(m) < \alpha_i\}$$

Dacă notăm $a = V \{m / n \leq_d m!\}$ atunci

$$n \leq_d (a+1)! \text{ și } a+1 = \wedge \{m / n \leq_d m!\} = S(n)$$

$$\text{deci } S_6(n) = [1, 2, \dots, S(n) - 1]$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} S_6(n_1 \bigvee^d n_2) &= [1, 2, \dots, S(n_1 \bigvee^d n_2) - 1] = \\ &= [1, 2, \dots, S(n_1) \vee S(n_2) - 1] \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} S_6(n_1) \vee^d S_6(n_2) &= [[1, 2, \dots, S_6(n_1)-1], [1, 2, \dots, S_6(n_2)-1]] = \\ &= [1, 2, \dots, S_6(n_1) \vee S_6(n_2)-1] \end{aligned}$$

(iii) Egalitățile rezultă din faptul că

$$S_7(n) = [1, 2, \dots, m] \Leftrightarrow n \in [m!, (m+1)!-1]$$

Acum vom extinde funcția S la mulțimea numerelor raționale.

Orice număr rațional pozitiv poate fi descompus în factori primi sub forma

$$a = \prod_p p^{\alpha_p} \quad (3.1.8.)$$

cu $\alpha_p \in \mathbb{Z}$ și doar un număr finit dintre acești exponenți sunt nenuli.

Avînd în vedere această scriere se dă definiția divizibilității numerelor raționale în felul următor:

3.1.5. Definiție. Numărul rațional $a = \prod p^{\alpha_p}$ divide numărul rațional $b = \prod p^{\beta_p}$ dacă $\alpha_p \leq \beta_p$.

Datorită egalității (3.1.8.) înmulțirea numerelor raționale se reduce la adunarea exponenților acestor numere. În consecință, problemele în legătură cu divizibilitatea numerelor raționale se reduc la probleme de ordine între exponenți.

Cel mai mare divizor comun d și cel mai mic multiplu comun e se definesc $[H_2]$ prin

$$d = (a, b, \dots) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p, \dots)} \quad (3.1.9.)$$

$$e = [a, b, \dots] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p, \dots)}$$

Mai mult, între cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al unor numere raționale nenule există relația

$$[a, b, \dots] = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \dots\right)} \quad (3.1.10.)$$

Desigur, orice număr rațional pozitiv a poate fi scris sub forma

$$a = n/n_1 \text{ cu } n \in \mathbb{N}, n_1 \in \mathbb{N}^*, (n, n_1) = 1.$$

3.1.6. Definiție. Prelungirea $S: \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ a funcției Smarandache este

$$S(n/n_1) = S_1(n) / S_4(n_1) \quad (3.1.11.)$$

O consecință a acestei definiții este aceea că dacă n_1 și n_2 sunt întregi pozitivi, atunci

$$S\left(\frac{1}{n_1} \vee \frac{1}{n_2}\right) = S\left(\frac{1}{n_1}\right) \vee S\left(\frac{1}{n_2}\right) \quad (3.1.12.)$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{n_1} \vee \frac{1}{n_2}\right) &= S\left(\frac{1}{n_1 \wedge n_2}\right) = \frac{1}{S_4(n_1 \wedge n_2)} = \frac{1}{S_4(n_1) \wedge S_4(n_2)} = \\ &= \frac{1}{S_4(n_1)} \vee \frac{1}{S_4(n_2)} = S\left(\frac{1}{n_1}\right) \vee S\left(\frac{1}{n_2}\right) \end{aligned}$$

În general

$$S\left(\frac{n}{n_1} \vee \frac{m}{m_1}\right) = (S(n) \vee S(m)) \cdot \left(S\left(\frac{1}{n_1}\right) \vee S\left(\frac{1}{m_1}\right)\right) \quad (3.1.13.)$$

formulă care generalizează egalitatea (2.2.2.)

3.1.7. Definiție. Funcția $\tilde{S}: Q_+^* \rightarrow Q_+^*$ definită prin

$$\tilde{S}(a) = \frac{1}{S\left(\frac{1}{a}\right)}$$

se numește duala funcției S .

3.1.8. Propoziție. Duala \tilde{S} a funcției S satisface

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \tilde{S}(n_1 \wedge n_2) = \tilde{S}(n_1) \wedge \tilde{S}(n_2) \\ \text{(ii)} \quad & \tilde{S}\left(\frac{1}{n_1} \wedge \frac{1}{n_2}\right) = \tilde{S}\left(\frac{1}{n_1}\right) \wedge \tilde{S}\left(\frac{1}{n_2}\right) \end{aligned}$$

pentru orice n_1 și n_2 .

Mai mult, avem și

$$\tilde{S}\left(\frac{n}{n_1} \wedge \frac{m}{m_1}\right) = (\tilde{S}(n) \wedge \tilde{S}(m)) \cdot \left(\tilde{S}\left(\frac{1}{n_1}\right) \wedge \tilde{S}\left(\frac{1}{m_1}\right)\right)$$

Demonstrația este evidentă.

Observații. 1) Restricția funcției \tilde{S} la mulțimea întregilor pozitivi coincide cu funcția S_4 .

2) Prelungirea funcției $S: \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ la mulțimea tuturor numerelor raționale nenule se poate face prin egalitatea

$$S(-a) = S(a)$$

pentru orice $a \in \mathbb{Q}_+^*$

3.2. Funcții numerice inspirate din definiția funcției Smarandache

În acest paragraf vom utiliza egalitatea (3.1.1.) și relația (2.4.9.) pentru a defini prin analogie alte funcții numerice.

Să observăm că putem spune că $n!$ este produsul tuturor numerelor întregi pozitive ce nu depășesc pe n , în lățimea \mathcal{L} . Analog, produsul q_m al tuturor divizorilor lui m , incluzînd pe unu și m , este produsul tuturor întregilor pozitivi ce nu depășesc pe m în lățimea \mathcal{L}_d . Deci putem considera funcții de forma

$$\theta(n) = \Lambda \{m / n \leq_d q(m)\}$$

Se știe că dacă

$$m = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_t^{x_t}$$

este descompunerea în factori a numărului m , atunci produsul tuturor divizorilor lui m este

$$q(m) \sqrt[m]{\tau(m)} \quad (3.2.1.)$$

unde $\tau(m) = (x_1+1)(x_2+1) \dots (x_t+1)$ este numărul divizorilor lui m .

Dacă n are descompunerea $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$ (3.1.5.)

inegalitatea $n \leq_d q(m)$ este echivalentă cu

$$q_1(x) \equiv x_1(x_1+1) \dots (x_t+1) - 2\alpha_1 \geq 0$$

$$q_2(x) \equiv x_2(x_2+1) \dots (x_t+1) - 2\alpha_2 \geq 0$$

$$\dots\dots\dots (3.2.2.)$$

$$q_t(x) \equiv x_t(x_t+1) \dots (x_t+1) - 2\alpha_t \geq 0$$

Deci $\theta(n)$ poate fi dedus rezolvând problema de programare neliniară

$$(\min) f(x) = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_t^{x_t} \quad (3.2.3.)$$

cu restricțiile (3.2.2.)

Soluția acestei probleme poate fi obținută aplicînd de exemplu algoritmul SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Techniques) datorat lui Fiacco și McCormick [F_1].

Exemple. 1) Pentru $n = 3^4 \cdot 5^{12}$, relațiile (3.2.2.) și (3.2.3.) devin

$$(\min) f(x) = 3^{x_1} \cdot 5^{x_2} \text{ cu restricțiile}$$

$$\begin{cases} x_1(x_1+1)(x_2+1) \geq 8 \\ x_2(x_1+1)(x_2+1) \geq 24 \end{cases}$$

Utilizînd algoritmul SUMT, considerăm funcția

$$U(x, n) = f(x) - r \sum_{i=1}^t \ln q_i(x)$$

și sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.4.)$$

În [F_1] se arată că dacă soluția $x_1(r)$, $x_2(r)$ a acestui sistem nu poate fi explicitată din sistem, putem face pe r să tindă la zero. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} x_1(x_1+1)(x_2+1) = 8 \\ x_2(x_1+1)(x_2+1) = 24 \end{cases}$$

și are soluția $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Deci avem

$$\min \{m / 3^4 \cdot 5^{12} \leq q(m)\} = m_0 = 3 \cdot 5^3$$

$$\text{Într-adevăr, } q(m_0) \sqrt{m_0^{12}} = m_0^4 = 3^4 \cdot 5^{12} = n$$

2) pentru $n = 3^2 \cdot 5^7$, din sistemul (3.2.4.) rezultă pentru x_2 ecuația $2x_2^3 + 9x_2^2 + 7x_2 - 98 = 0$

cu o soluție reală în intervalul $(2, 3)$. Rezultă $x_1 \in (4/7, 5/7)$.

Considerînd $x_1 = 1$, observăm că pentru $x_2 = 2$ perechea (x_1, x_2) nu este o soluție admisibilă a problemei, dar $x_2 = 3$ dă $\theta(3^2 \cdot 5^7) = 3^4 \cdot 5^{12}$

3) În general, pentru $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2}$ din sistemul (3.2.4.) rezultă ecuația

$$\alpha_1 x_2^3 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2^2 + \alpha_2 x_2 - 2\alpha_2^2 = 0$$

cu soluția dată de formulă lui Cartan.

Desigur, utilizînd "metoda tripletelor" putem atașa și funcției θ multe alte funcții.

Pentru funcția v dată de (2.4.9.) se pot de asemenea atașa funcțiile generate prin metoda tripletelor.

În cele ce urmează vom studia analogul funcției Smarandache și duala ei în acest al doilea caz.

3.2.1. Propoziție. Dacă n are descompunerea (3.2.1. i) atunci

$$(i) v(n) = \max_{i=1, t} p_i^{\alpha_i}$$

$$(ii) v(n_1 \vee n_2) = v(n_1) \vee v(n_2)$$

Demonstrație. (i) Fie

$$p_n^{\alpha n} = \max_i p_i^{\alpha_i}$$

atunci $p_i^{\alpha_i} \leq p_n^{\alpha_n}$ pentru $i = \overline{1, t}$, deci

$$p_i^{\alpha_i} \leq_d [1, 2, \dots, p_n^{\alpha_n}]$$

Dar $(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1$ pentru $i \neq j$ și deci

$$n \leq_d [1, 2, \dots, p_n^{\alpha_n}]$$

Dacă pentru un anumit m cu proprietatea $m \leq p_n^{\alpha_n}$ am avea $n \leq_d [1, 2, \dots, m]$, ar rezulta contradicția $p_n^{\alpha_n} \leq_d [1, 2, \dots, m]$.

(ii) Dacă

$$n_1 = \prod p^{\alpha_p}, n_2 = \prod p^{\beta_p}$$

atunci

$$n_1 \vee_d n_2 = \prod p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

deci

$$v(n_1 \vee_d n_2) = \max p^{\max(\alpha_p, \beta_p)} = \max(\max p^{\alpha_p}, \max p^{\beta_p})$$

și propoziția este demonstrată

Desigur putem spune că funcția $v_1 = v$ este definită de tripletul $(\Lambda, \in, \mathcal{R}_{[d]})$, unde

$$\mathcal{R}_{[d]} = \{m / n \leq_d [1, 2, \dots, m]\}$$

Duală sa, în sensul avut în vedere în paragraful precedent este funcția definită de tripletul $(V, \in, \mathcal{L}_{[d]})$. Să notăm cu v_4 această funcție

$$v_4(n) = V \{m / [1, 2, \dots, m] \leq_d n\}$$

Rezultă că $v_4(n)$ este cel mai mare întreg pozitiv cu proprietatea că toți întregii pozitivi $m \leq v_4(n)$ divid pe n .

Să observăm că o condiție necesară și suficientă pentru a avea $v_4(n) > 1$ este să existe $m > 1$ astfel încât toate numerele prime $p \leq m$ să dividă pe n .

Din definiția lui v_4 rezultă de asemenea că

$$v_4(n) = m \Leftrightarrow n \text{ este divizibil prin orice } i \leq m, \text{ dar nu prin } m+1.$$

3.2.2. Propoziție. Funcția v_4 satisface

$$v_4(n_1 \wedge_d n_2) = v_4(n_1) \wedge v_4(n_2)$$

Demonstrație. Să notăm

$$n = n_1 \wedge_d n_2, v_4(n) = m, v_4(n_i) = m_i, i = 1, 2$$

Dacă $m_1 = m_1 \wedge m_2$, arătăm că $m = m_1$.

Din definiția lui v_4 rezultă

$$v_4(n_i) = m_i \Leftrightarrow (\forall i \leq m_i \Rightarrow n \text{ este divizibil cu } i \text{ dar nu cu } m_i + 1)$$

Dacă am avea $m < m_1$, atunci $m + 1 \leq m_1 \leq m_2$, deci $m+1$ divide pe n_1 și pe n_2 , deci $m+1$ divide pe n . Dacă $m > m_1$, atunci $m_1 + 1 \leq m$, deci $m_1 + 1$ divide pe n .

Dar n divide pe n_1 , deci $m_1 + 1$ divide pe n_1 și propoziția este demonstrată.

Să observăm că onotînd

$$t_0 = \max \{ i / j \leq i \Rightarrow n \text{ este divizibil cu } j \}$$

Atunci $v_4(n)$ se poate obține rezolvînd problema de programare liniară

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^{t_0} x_i \ln p$$

$$x_i \leq a_i \text{ pentru } i = \overline{1, t_0}$$

$$\sum_{i=1}^{t_0} x_i \ln p_i \leq \ln p_{t_0+1}$$

Dacă f_0 este valoarea maximă a lui f din această problemă, atunci

$$v_4(n) = e^{f_0}$$

De exemplu, $v_4(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11) = 6$

Desigur și funcția v poate fi extinsă la mulțimea numerelor raționale, prin același procedeu ca și funcția S .

3.3. Funcții Smarandache de tipul unu, doi și trei

Fie X o mulțime nevidă, $r \subset X \times X$ o relație de echivalență, \hat{X} mulțimea claselor de echivalență corespunzătoare și (I, \leq) mulțime total ordonată.

3.3.1. Definiție. Dacă $g: \hat{X} \rightarrow I$ este o funcție injectivă oarecare, atunci funcția

$$f: X \rightarrow I, f(x) = g(\hat{x}) \quad (3.3.1.)$$

se numește funcție de standardizare.

Despre mulțimea X vom spune în acest caz că este $(r, (I, \leq), f)$ standardizată.

3.3.2. Definiție. Dacă r_1 și r_2 sunt două relații de echivalență pe X , relația $r = r_1 \wedge r_2$ este determinată de condiția

$$x r y \Leftrightarrow x r_1 y \text{ și } x r_2 y \quad (3.3.2)$$

Se observă cu ușurință că r este o relație de echivalență.

3.3.3. Definiție. Funcțiile $f_i: X \rightarrow I, i = \overline{1, s}$, au aceeași monotonie dacă pentru orice $x, y \in X$ rezultă

$$f_k(x) \leq f_k(y) \Leftrightarrow f_j(x) \leq f_j(y), k, j = \overline{1, s}$$

3.3.4. Teoremă. Dacă funcțiile de standardizare $f_i: X \rightarrow I$, corespunzătoare relațiilor de echivalență r_i , pentru $i = \overline{1, s}$, au aceeași monotonie, atunci funcția

$$f = \max_i f_i$$

este o funcție de standardizare corespunzătoare relației $r = \bigwedge_{i=1}^s r_i$ și este de aceeași monotonie cu funcțiile f_i .

Demonstrație. Dăm demonstrația acestei teoreme pentru cazul $s = 2$. În cazul general demonstrația rezultă apoi prin inducție.

Să notăm cu \hat{x}_{r_1} , \hat{x}_{r_2} și \hat{x}_r clasele de echivalență ale lui x corespunzătoare respectiv relațiilor de echivalență r_1 , r_2 și $r = r_1 \wedge r_2$, iar cu \hat{X}_{r_1} , \hat{X}_{r_2} , \hat{X}_r mulțimile cît corespunzătoare.

Avem $f_i(x) = g_i(\hat{x}_i)$, $i = 1, 2$, unde $g_i: \hat{X}_i \rightarrow I$ sunt funcții injective.

Funcția $g: \hat{X}_r \rightarrow I$ definită prin $g(\hat{x}_r) = \max(g_1(\hat{x}_{r_1}), g_2(\hat{x}_{r_2}))$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $\hat{x}_r^1 \neq \hat{x}_r^2$ și $\max(g_1(\hat{x}_{r_1}^1), g_2(\hat{x}_{r_2}^1)) = \max(g_1(\hat{x}_{r_1}^2), g_2(\hat{x}_{r_2}^2))$, atunci datorită injectivității funcțiilor g_1 și g_2 avem de exemplu

$$\max(g_1(\hat{x}_{r_1}^1), g_2(\hat{x}_{r_2}^1)) = g_1(\hat{x}_{r_1}^2) = \max(g_1(\hat{x}_{r_1}^2), g_2(\hat{x}_{r_2}^2))$$

și avem o contradicție, deoarece

$$f_1(x^2) = g_1(\hat{x}_{r_1}^2) < g_1(\hat{x}_{r_1}^1) = f_1(x^1)$$

$$f_2(x_1) = g_2(\hat{x}_{r_2}^1) < g_2(\hat{x}_{r_2}^2) = f_2(x^2)$$

deci f_1 și f_2 nu sunt de aceeași monotonie.

Din injectivitatea lui g rezultă că funcția $f: X \rightarrow I$, $f(x) = g(\hat{x}_r)$

este o funcție de standardizare. În plus avem

$$\begin{aligned} f(x^1) \leq f(x^2) &\Leftrightarrow g(\hat{x}_r^1) \leq g(\hat{x}_r^2) \Leftrightarrow \max(g_1(\hat{x}_{r_1}^1), g_2(\hat{x}_{r_2}^1)) \leq \\ &\max(g_1(\hat{x}_{r_1}^2), g_2(\hat{x}_{r_2}^2)) \Leftrightarrow \max(f_1(x^1), f_2(x^1)) \leq \max(f_1(x^2), f_2(x^2)) \\ &\Leftrightarrow f_1(x^1) \leq f_1(x^2) \text{ și } f_2(x^1) \leq f_2(x^2) \text{ deoarece } f_1 \text{ și } f_2 \text{ au aceeași} \\ &\text{monotonie.} \end{aligned}$$

Să considerăm acum că și sunt două operații algebrice pe X , respectiv I .

3.3.5. Definiție. Funcția de standardizare $f: X \rightarrow I$ se spune că este Σ compatibilă cu operațiile τ și \perp dacă pentru orice $x, y \in X$ tripletul $(f(x), f(y), f(x \tau y))$ satisface condiția Σ .

În acest caz, vom mai spune că funcția f Σ -standardizează structura (X, τ) pe structura $(I, \leq, +)$.

Exemplu. Dacă f este funcția Smarandache $S: N^* \rightarrow N^*$, avem următoarele standardizări

(a) funcția S, Σ_1 - standardizează (N^*, \bullet) în $(N^*, \leq, +)$ deoarece avem

$$(\Sigma_1): S(a \bullet b) \leq S(a) + S(b)$$

b) Funcția S verifică de asemenea relația

$$(\Sigma_2): \max(S(a), S(b)) \leq S(a \bullet b) \leq S(a) \cdot S(b)$$

deci această funcție (Σ_2) standardizează structura (N^*, \bullet) în (N^*, \leq, \cdot) .

Cu această introducere putem defini funcțiile Smarandache de primul tip.

Am văzut că funcția Smarandache S' a fost definită cu ajutorul funcțiilor S_p avînd proprietățile (a) și (b) din paragraful 2.2. Amintim că pentru fiecare număr prim p funcția $S_p: N^* \rightarrow N^*$ este definită de condițiile

$$1) S_p(n)! \text{ este divizibil cu } p^n$$

$$2) S_p(n) \text{ este cel mai mic întreg pozitiv avînd proprietatea 1).}$$

Utilizînd definiția funcției de standardizare prezentăm în continuare $[B_2]$ trei generalizări ale funcției S_p .

Vom nota cu M_n un multiplu de n .

3.3.6. Definiție. Pentru orice $n \in N^*$ relația $r_n \subset N^* \times N^*$ este determinată de condițiile

(i) Dacă $n = u^i$, cu $u = 1$ sau $u = p$ - număr prim,

și $i \in \mathbb{N}^*$, iar $a, b \in \mathbb{N}^*$ atunci

$$a r_n b \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, k! = Mu^{ia}, k! = Mu^{ib}$$

și k este cel mai mic întreg pozitiv cu această proprietate

(ii) Dacă $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_s^{i_s}$, (3.3.4)

atunci

$$r_n = r_{p_1^{i_1}} \wedge r_{p_2^{i_2}} \wedge \dots \wedge r_{p_s^{i_s}}$$

3.3.7. Definiție. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ funcția Smarandache de primul tip este funcția numerică

$S_n: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ determinată de condițiile

(i) Dacă $n = U^i$, cu $U = 1$ sau $U = p$ număr prim

atunci $S_n(a)$ este cel mai mic întreg pozitiv

K având proprietatea $K! = Mu^{ia}$

(ii) Dacă $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_s^{i_s}$ atunci

$$S_n(a) = \max_{1 \leq i \leq s} (S_{p_i^{i_i}}(a))$$

Se observă că:

1. Funcțiile S_n sunt funcții de standardizare corespunzătoare relațiilor de echivalență r_n definite mai sus și pentru $n = 1$ obținem $\hat{x}_{r_1} = \mathbb{N}^*$, pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$, iar $s_1(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dacă $n = p$ este un număr prim, atunci S_n este funcția S_p definită de F. Smarandache.

3. Funcțiile S_n sunt crescătoare și deci sunt de aceeași monotonie, în sensul definiției (3.3.3.).

3.3.8. Teoremă. Funcțiile S_n au proprietatea că Σ_1 standardizează $(\mathbb{N}^*, +)$ pe $(\mathbb{N}^*, \leq, +)$ prin relația

$$(\Sigma_1): \max(S_n(a), S_n(b)) \leq S_n(a+b) \leq S_n(a) + S_n(b)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ și (Σ_2) standardizează structura $(\mathbb{N}^*, +)$ pe

structura (N^*, \leq, \cdot) prin

$$(\Sigma_2): \max(S_n(a), S_n(b)) \leq S_n(a+b) \leq S_n(a) \cdot S_n(b)$$

pentru orice $a, b \in N^*$

Demonstrație. Fie p un număr prim și $n = p^i$, cu $i \in N^*$, iar

$$a^* = S_p^i(a), b^* = S_p^i(b), k = S_p^i(a+b)$$

Atunci datorită definiției lui S_n numerele a^* , b^* și k sunt cele mai mici numere întregi pozitive cu proprietățile:

$$a^*! = Mp^{ia}, b^*! = Mp^{ib}, k! = Mp^{i(a+b)}.$$

Deoarece $k! = Mp^{ia} = Mp^{ib}$ rezultă $a^* \leq k$ și $b^* \leq k$, deci $\max(a^*, b^*) \leq k$, ceea ce demonstrează primele inegalități din (Σ_1) și (Σ_2) .

Deoarece

$$(a^* + b^*)! = a^*!(a^* + 1) \dots (a^* + b^*) = Mp^{i(ab)} \text{ rezultă că}$$

$$\text{avem } k \leq a^* + b^*, \text{ deci } (\Sigma_1) \text{ este verificată.}$$

Dacă $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_s^{i_s}$, avînd în vedere cele de mai sus deducem

$$(\Sigma_1): \max(S_{p_j j}^{i_j}(a), S_{p_j j}^{i_j}(b)) \leq S_{p_j j}^{i_j}(a+b) \leq S_{p_j j}^{i_j}(a) + S_{p_j j}^{i_j}(b)$$

pentru $j = \overline{1, s}$

În consecință

$$\max(\max_j S_{p_j j}^{i_j}(a), \max_j S_{p_j j}^{i_j}(b)) \leq \max_j S_{p_j j}^{i_j}(a+b) \leq$$

$$\leq \max_j (S_{p_j j}^{i_j}(a)) + \max_j (S_{p_j j}^{i_j}(b)) \text{ pentru } j = \overline{1, s}$$

Așadar

$$\max(S_n(a), S_n(b)) \leq S_n(a+b) \leq S_n(a) + S_n(b)$$

Pentru demonstrarea celei de-a doua inegalități din (Σ_2) să amintim că $(a+b)! \leq (ab)!$ dacă și numai dacă $a > 1$ și $b > 1$ și să

observăm că inegalitatea este satisfăcută pentru $n = 1$ deoarece

$$S_1(a+b) = S_1(a) = S_1(b) = 1$$

Fie acum $n > 1$. Rezultă că pentru $a^* = S_n(a)$ avem $a^* > 1$.

Într-adevăr, dacă n are descompunerea (3.3.4.) atunci

$$a^* = 1 \Leftrightarrow S_n(a) = \max_{p_j | j} S_{p_j}(a) = 1$$

ceea ce implică $p_1 = p_2 = \dots = p_s = 1$, deci $n = 1$.

Prin urmare, pentru orice $n > 1$ avem

$$S_n(a) = a^* > 1 \text{ și } S_n(b) = b^* > 1$$

atunci $(a^* + b^*)! \leq (a^* \cdot b^*)!$ și obținem

$$S_n(a+b) < S_n(a) + S_n(b) \leq S_n(a) \cdot S_n(b)$$

În continuare prezentăm câteva rezultate referitoare la monotonia funcțiilor Smarandache de primul tip.

3.3.9. Propoziție. Pentru fiecare întreg pozitiv n funcția Smarandache de primul tip S_n este crescătoare.

Demonstrație. Dacă n este număr prim și $k_1 < k_2$, ținând cont că avem

$$(S_n(k_2))! = Mn^{k_2} = Mn^{k_1}$$

$$\text{rezultă } S_n(k_1) \leq S_n(k_2)$$

Pentru n număr întreg oarecare fie

$$S_{pm}(i, k_1) = \max_{1 \leq j \leq k_1} S_{p_j}(i, k_1) = S_n(k_1)$$

$$S_{pt}(i, k_2) = \max_{1 \leq j \leq k_2} S_{p_j}(i, k_2) = S_n(k_2)$$

Deoarece

$$S_{pn}(i, k_1) \leq S_{pm}(i, k_2) \leq S_{pt}(i, k_2)$$

rezultă că $S_n(k_1) \leq S_n(k_2)$ și propoziția este demonstrată.

3.3.10. Propoziție. Șirul de funcții $(S_p)_{i \in \mathbb{N}^*}$ este monoton crescător pentru orice număr prim p .

Demonstrație. Pentru orice $i_1, i_2 \in \mathbb{N}^*$, cu $i_1 < i_2$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$S_{p i_1}(n) = S_p(i_1 \cdot n) \leq S_p(i_2 \cdot n) = S_{p i_2}(n)$$

deci $S_{p i_1} \leq S_{p i_2}$ și propoziția este demonstrată

3.3.11. Propoziție. Fie p și q numere prime date. Atunci

$$p < q \Rightarrow S_p(k) < S_q(k) \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și

$$k = t_1 a_s(p) + t_2 a_{s-1}(p) + \dots + t_s a_1(p) \quad (3.3.5.)$$

scrierea lui k în baza $[p]$. Se știe că avem $0 \leq t_i \leq p-1$, pentru $i = 1, s$, iar ultima cifră semnificativă poate lua și valoarea p .

Trecerea de la k la $k+1$ în (3.3.5.) pune în evidență următorul algoritm:

(i) t_s este mărit cu o unitate

(ii) dacă t_s nu poate fi mărit cu o unitate, atunci t_{s-1} este mărit cu o unitate și t_s devine zero.

(iii) dacă nici t_s nici t_{s-1} nu pot fi măriți cu o unitate atunci t_{s-2} se mărește cu o unitate, iar t_s și t_{s-1} devine egali cu zero.

Procedeul continuă în acest fel pînă obținem expresia lui $k+1$

Notăm cu

$$\Delta_k(S_p) = S_p(k+1) - S_p(k) \quad (3.3.6.)$$

saltul funcției S_p cînd trecem de la k la $k+1$, urmînd procedeul descris mai înainte găsim

- în cazul (i) $\Delta_k(S_p) = p$

- în cazul (ii) $\Delta_k(S_p) = 0$

- în cazul (iii) $\Delta_k(S_p) = 0$

Se observă că

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_p) + S_p(1)$$

și analog

$$S_q(n) = \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_q) + S_q(1)$$

Ținînd cont că $S_p(1) = p < q = S_q(1)$ și utilizînd algoritmul de mai sus deducem că numărul de salturi cu valoarea zero a lui S_p este mai mare decît numărul de salturi cu valoarea zero a lui S_q și respectiv numărul de salturi cu valoarea p a lui S_p este mai mic decît numărul de salturi cu valoarea q a lui S_q , de unde rezultă

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k(S_p) + S_p(1) < \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_q) + S_q(1) \quad (3.3.7.)$$

deci $S_p(n) < S_q(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu. Tabelul cu valorile lui S_2 și S_3 pentru $0 < n \leq 20$ este

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
saltul	2	0	2	2	0	0	2	2	0	2	2	0	0	0	2	0	2	2	2	
$S_2(k)$	2	4	4	6	8	8	8	10	12	12	14	16	16	16	16	18	18	20	22	24
saltul	3	3	0	3	3	3	0	3	3	3	0	0	3	3	3	0	3	3	3	
$S_3(k)$	3	6	9	9	12	15	18	18	21	24	27	27	27	27	30	36	36	39	42	45

Deci $S_2(k) < S_3(k)$ pentru $k = \overline{1, 20}$

Observație. Pentru orice șir crescător de numere prime $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ rezultă $S_1 < S_{p_1} < S_{p_2} < \dots < S_{p_n} < \dots$ și dacă $n = p_1^i \cdot p_2^j \cdot \dots \cdot p_t^l$ cu $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ atunci

$$S_n(k) = \max_{1 \leq j \leq k} S_{p_j^i}(k) = S_{p_t^l}(k) = S_{p_t}(ik)$$

3.3.12. Propoziție. Dacă p și q sunt numere prime și $p \cdot i < q$ atunci $S_p^i < S_q$.

Demonstrație. Deoarece $p \cdot i < q$ rezultă

$$S_p^i(1) \leq p \cdot i < q = S_q(1) \quad (3.3.8.)$$

$$\text{și } S_p^i(k) = S_p(ik) \leq i S_p(k)$$

Trecînd de la k la $k+1$, din (3.3.8.) deducem

$$\Delta_k(S_p^i) \leq \Delta_k(S_p) \quad (3.3.9.)$$

Ținînd cont de propoziția 3.3.11 din egalitatea (3.3.9.) rezultă că trecînd de la k la $k+1$ obținem

$$\Delta_k(S_p^i) \leq i \Delta_k(S_p) \leq i \cdot p < q \text{ și}$$

$$i \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_p) \leq \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_q) \quad (3.3.10.)$$

Deoarece avem

$$S_p^i(n) = S_{p^i}(1) + \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_p^i) \leq S_p^i(1) + i \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_p)$$

și

$$S_q(n) = S_q(1) + \sum_{k=1}^n \Delta_k(S_q)$$

din (3.3.8.) și (3.3.10) rezultă $S_p^i(n) \leq S_q(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

și propoziția este demonstrată.

3.3.13. Propoziție. Dacă p este număr prim, atunci $S_n < S_p$ pentru orice $n < p$.

Demonstrație. Dacă n este un număr prim, din inegalitatea $n < p$, utilizînd propoziția 3.3.11. rezultă $S_n(k) < S_p(k)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă n este un număr compus $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_t^{i_t}$, atunci

$S_n(k) = \max_{1 \leq j \leq t} (S_{p_j^{i_j}}(k)) = S_{p_r^{i_r}}(k)$ și deoarece $n < p$ rezultă că $p_r^{i_r} < p$, deci cum $i_r p_r \leq p_r^{i_r} < p$, utilizînd propoziția precedentă rezultă $S_{p_r^{i_r}}(k) \leq S_p(k)$, deci $S_n(k) < S_p(k)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Trecem acum la prezentarea funcțiilor Smarandache de al doilea tip, așa cum este ea definită în $[B_2]$.

3.3.14. Definiție. Funcțiile Smarandache de tipul doi sunt funcțiile $S^k: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ definite prin egalitatea

$S^k(n) = S_n(k)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, unde S_n este funcția Smarandache de primul tip corespunzătoare lui n .

Observăm că pentru $k = 1$, S^k este chiar funcția Smarandache S . Într-adevăr, pentru $n > 1$ avem

$$S^1(n) = S_n(1) = \max_j (S_{p_j^{i_j}}(1)) = \max_{p_j} (S_{p_j}(i_j)) = S(n)$$

3.3.15. Teoremă. Funcțiile Smarandache de tipul doi Σ_3 -standardizează structura (\mathbb{N}^*, \cdot) pe structura $(\mathbb{N}^*, \leq, +)$ prin

$$(\Sigma_3): \max (S^k(a), S^k(b)) \leq S^k(a \cdot b) \leq S^k(a) + S^k(b)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ și în același timp Σ_4 -standardizează structura (\mathbb{N}^*, \cdot) pe structura $(\mathbb{N}^*, \leq, \cdot)$ prin

$$(\Sigma_4): \max (S^k(a), S^k(b)) \leq S^k(a \cdot b) \leq S^k(a) \cdot S^k(b)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. Relația de echivalență r^k corespunzătoare lui S^k este definită prin

$$a r^k b \Leftrightarrow \exists a^* \in \mathbb{N}^* \ a^{\bar{x}}! = Ma^{\bar{k}}, a^*! = Mb^{\bar{k}} \quad (3.3.11.)$$

și a^* este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea (3.3.11.). Prin urmare, putem pune că S^k este o funcție de standardizare atașată relației de echivalență r^k .

Să observăm că funcțiile Smarandache de tipul al doilea nu sunt de aceeași monotonie deoarece de exemplu $S^2(a) \leq S^2(b) \Leftrightarrow S(a^2) \leq S(b^2)$ și de aici nu rezultă $S^1(a) \leq S^1(b)$.

Pentru fiecare $a, b \in \mathbb{N}^*$, fie $a^* = S^k(a)$, $b^* = S^k(b)$, $C = S^k(a \cdot b)$. Atunci a^* , b^* și C^* sunt respectiv cele mai mici numere întregi pozitive cu proprietățile

$a^*! = Ma^k$, $b^*! = Mb^k$, $C^*! = M(a^k \cdot b^k)$ și deci $C^*! = Ma^k = Mb^k$, de unde rezultă

$$a^* \leq C^*, b^* \leq C^*$$

ceea ce implică $\max(a^*, b^*) \leq C^*$, adică

$$\max(S^k(a), S^k(b)) \leq S^k(a \cdot b) \quad (3.3.12.)$$

Dar deoarece $(a^* + b^*)! = M(a^*! b^*!) = M(a^k b^k)$

rezultă că avem și $C^* \leq a^* + b^*$, deci

$$S^k(a \cdot b) \leq S^k(a) + S^k(b) \quad (3.3.13.)$$

Din (3.3.12) și (3.3.13) obținem $\max(S^k(a), S^k(b)) \leq S^k(a) + S^k(b)$ deci (Σ_3) este verificată.

În sfârșit, deoarece $(a^* b^*)! = M(a^*! b^*!)$

rezultă că avem și

$$S^k(a \cdot b) \leq S^k(a) \cdot S^k(b)$$

ceea ce demonstrează pe (Σ_4) .

3.3.16. Propoziție. Pentru orice $k, n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$S^k(n) < n \cdot k \quad (3.3.14.)$$

Demonstrație. Fie $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_t^{i_t}$ și

$$S(n) = \max_{1 \leq j \leq t} (S_{p_j}(i_j)) = S(p_m^{i_m})$$

Atunci, deoarece

$$S^k(n) = S(n^k) = \max_{1 \leq j \leq t} (S_{p_j}(i_j k)) = S(p_r^{i_r k}) \leq k S(p_r^{i_r}) \leq k S(p_m^{i_m}) = k S(n)$$

și $S(n) \leq n$, rezultă inegalitatea (3.3.14.).

3.3.17. Teoremă. Orice număr prim $p \geq 5$ este punct de maxim local pentru funcțiile S^k și $S^k(p) = p(k - i_p(k))$

unde i_p sunt funcțiile definite prin egalitatea (2.3.13.).

Demonstrație. Dacă $p > 5$ este un număr prim, partea întâi a teoremei rezultă din inegalitățile

$$S_{p-1}(k) < S_p(k) \text{ și } S_{p+1}(k) < S_p(k)$$

pe care le satisfac funcțiile Smarandache de primul timp.

A doua parte a teoremei rezultă din definiția funcțiilor S^k :

$$S^k(p) = S_p(k) = p(k - i_p(k))$$

și teorema este demonstrată

Să observăm că avem și

$$S^k(p) = p \cdot k \text{ pentru } p \geq k.$$

3.3.18. Teoremă. Numerele kp , cu p număr prim și $p > k$, sunt puncte fixe pentru funcția S^k .

Demonstrație. Fie p un număr prim, $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$ descompunerea în factori a lui m și $p > \max(m, 4)$. Atunci

$$p_i \alpha_i \leq p_i^{\alpha_i} < p \text{ pentru } i = \overline{1, t}$$

deci avem

$$S^k(mp) = S((mp)^k) = \max_{1 \leq i \leq k} (S_{p_i}(\alpha_i), S_p(k)) = S_p(k) = kp$$

Pentru $m = k$ obținem

$$S^k(kp) = kp$$

deci kp este punct fix pentru S^k .

3.3.19. Teoremă. Funcțiile S^k au următoarele proprietăți:

$$(i) S^k = o(n^{1+\varepsilon}) \text{ pentru } \varepsilon > 0$$

$$(ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n^k)}{n} = k$$

Demonstrație. Avem

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^k(n)}{n^{1+\varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n^k)}{n^{1+\varepsilon}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^k(n)}{n^{1+\varepsilon}} = k \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon}} = 0$$

și (i) este demonstrată.

De asemenea

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S^k(n)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n^k)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(p_n^k)}{p_n} = k$$

unde $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șirul numerelor prime.

3.3.20. Teoremă. Funcțiile Smarandache de tipul al doilea sunt în general crescătoare, în sensul că $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists m \geq m_0 \Rightarrow S^k(m) \geq S^k(n)$.

Demonstrație. Se știe $[S_5]$ că funcția Smarandache este în general crescătoare, adică

$$\forall t \in \mathbb{N}^* \exists r_0 \in \mathbb{N}^* \forall r \geq r_0 \Rightarrow S(r) \geq S(t) \quad (3.3.15.)$$

Fie $t = n^k$ și r_0 astfel încât pentru orice $r \geq r_0$ avem $S(r) \geq S(n^k)$.

Fie de asemenea $m_0 = [\sqrt[k]{r_0}] + 1$. Desigur $m_0 \geq \sqrt[k]{r_0} \Leftrightarrow m_0^k \geq r_0$ și

$$m \geq m_0 \Leftrightarrow m^k \geq m_0^k.$$

Deoarece $m^k \geq m_0^k \geq r_0$ rezulta

$$S(m^k) \geq S(n^k) \text{ adica } S^k(m) \geq S^k(n)$$

Aşadar

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists m_0 = [\sqrt[k]{r_0}] + 1 \forall m \geq m_0 \Rightarrow S^k(m) \geq S^k(n)$$

unde $r_0 = r_0(n^k)$ este dat de (3.3.15.)

3.3.21. Teoremă. Fiecare număr $n = p!$, cu $p \geq \max(3, k)$, număr prim este punct de minim relativ al lui S^k .

Demonstrație. Fie

$$p! = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_m^{i_m} \cdot p$$

descompunerea lui $p!$ în factori primi, astfel încît

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_m < p.$$

Deoarece $p!$ este divizibil cu $p_j^{i_j}$, rezultă

$$S(p_j^{i_j}) \leq p = S(p) \text{ pentru orice } j = \overline{1, m}.$$

Desigur

$$S^k(p!) = S((p!)^k) = \max_{1 \leq j \leq m} (S(p_j^{k i_j}), S(p^k))$$

și

$$S(p_j^{i_j}) \leq k S(p_j^{i_j}) < k S(p) = kp = S(p^k)$$

pentru $k \leq p$. Prin urmare

$$S^k(p!) = S(p^k) = kp \text{ pentru } k \leq p \quad (3.3.16.)$$

Dacă descompunerea lui $p!-1$ în factori primi este

$$p!-1 = q_1^{i_1} \cdot q_2^{i_2} \cdot \dots \cdot q_t^{i_t}$$

atunci avem $q_j > p$ pentru $j = \overline{1, t}$

Rezultă

$$S(p!-1) = \max_{1 \leq j \leq p} (S(q_j^{ij})) = S(q_m^{im})$$

cu $q_m \cdot p$, și deoarece $S(q_m^{im}) > S(p) = S(p!)$ rezultă că
 $S(p!-1) > S(p!)$

Analog se arată că $S(p!) + 1 > S(p!)$

Desigur

$$S^k(p!-1) = S((p!-1)^k) \geq S(q_m^{k \cdot im}) \geq S(q_m^k) > S(p^k) = k \cdot p \quad (3.3.17.)$$

și

$$S^k(p!+1) = S((p!+1)^k) > k \cdot p \quad (3.3.18.)$$

Din (3.3.16.), (3.3.17.) și (3.3.18.) rezultă demonstrația teoremei.

În încheierea acestui paragraf vom prezenta funcțiile Smarandache de al treilea tip, așa cum au fost ele definite de I. Bălăcenoiu în $[B_2]$.

Să considerăm șirurile arbitrare

$$(a): 1 = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$(b): 1 = b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

avînd proprietățile

$$a_{kn} = a_k \cdot a_n, b_{kn} = b_k \cdot b_n \quad (3.3.19.)$$

Desigur, există o infinitate de șiruri cu aceste proprietăți deoarece alegînd o valoare arbitrară pentru a_{27} termenii următori din șirul (a) se determină punînd condiția să fie satisfăcută relația de recurență.

Fie acum funcția

$$f_a^b: N^* \rightarrow N^*, f_a^b(n) = S_{an}(b_n)$$

unde S_{an} este funcție Smarandache de primul tip.

Se observă ușor că

(i) dacă $a_n = 1$ și $b_n = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă $f_a^b = S_1$

(ii) dacă $a_n = n$ și $b_n = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă $f_a^b = S^1$.

3.3.22. Definiție. Funcțiile Smarandache de tipul al treilea sunt funcțiile S_a^b definite prin

$$S_a^b = f_a^b$$

în cazul cînd șirurile (a) și (b) diferă de cele care generează funcțiile S_1 și S^1 .

3.3.23. Teoremă. Funcțiile f_a^b au proprietatea că Σ_5 -standardizează structura (\mathbb{N}^*, \cdot) pe structura $(\mathbb{N}^*, \leq, +, \cdot)$ prin

$$(\Sigma_5): \max(f_a^b(k), f_a^b(n)) \leq f_a^b(k \cdot n) \leq b_n f_a^b(k) = b_k f_a^b(n)$$

Demonstrație. Fie

$$f_a^b(k) = S_{ak}(b_k) = k^*, f_a^b(n) = S_{an}(b_n) = n^*$$

$$f_a^b(k \cdot n) = S_{a \cdot k \cdot n}(b_{k \cdot n}) = t^*$$

Atunci k^* , n^* și t^* sunt cei mai mici întregi pozitivi pentru care

$$k^*! = M(a_k^{bk}), n^*! = M(a_n^{bn}), t^*! = M(a_{nk}^{b_{nk}}) = M((a_k \cdot a_n)^{b_k \cdot b_n})$$

și deci

$$\max(k^*, n^*) \leq t^* \quad (3.3.20)$$

Mai mult, deoarece

$$(b_k \cdot n^*)! = M((n^*)^{bk}), (b_n \cdot k^*)! = M((k^*)^{bn})$$

$$\begin{aligned} (b_k \cdot n^* + b_n \cdot k^*)! &= M((b_k \cdot n^*)!(b_n \cdot k^*)!) = M((n^*)^{bk} \cdot (k^*)^{bn}) = \\ &= M((a_n^{bn})^{bk} \cdot (a_k^{bk})^{bn}) = M((a_k \cdot a_n)^{b_k \cdot b_n}) \end{aligned}$$

rezultă că

$$t^* \leq b_n \cdot k^* + b_k \cdot n^* \quad (3.3.21.)$$

Din (3.3.20.) și (3.3.21.) obținem

$$\max(k^*, n^*) \leq t^* \leq b_n \cdot k^* + b_n \cdot n^* \quad (3.3.22.)$$

Din această inegalitate rezultă (Σ_5) , deci funcția Smarandache de al treilea tip satisface

$$(\Sigma_6): \max(S_a^b(k), S_a^b(n)) \leq S_a^b(k \cdot n) \leq b_n S_a^b(k) + b_k S_a^b(n)$$

pentru orice $k, n \in N^*$

Exemplu. Fie șirurile (a) și (b) determinate de $a_n = b_n = n$, cu $n \in N^*$. Funcția Smarandache de al treilea tip corespunzătoare este

$$S_a^a: N^* \rightarrow N^*, S_a^a(n) = S_n(n)$$

și (Σ_6) devine

$$\max(S_k(k), S_n(n)) \leq S_{k \cdot n}(k \cdot n) \leq n S_k(k) + k S_n(n)$$

pentru orice $k, n \in N^*$.

Această relație este echivalentă cu următoarea relație, scrisă cu ajutorul funcției Smarandache

$$\max(S(k^k), S(n^n)) \leq S((k \cdot n)^{k \cdot n}) \leq n S(k^k) + k S(n^n).$$

Cuprins

Introducere	5
Capitolul 1	
Generalizarea unor teoreme de congruență	
1.1. Noțiuni introductive	7
1.2. Teoreme de congruență din teoria numerelor	10
1.3. Un punct de vedere unificator asupra unor teoreme de congruență din teoria numerelor	14
1.4. Contribuții la o conjectură a lui Carmichael	19
1.5. Funcții prime	23
Capitolul 2	
2.1. Baze de numerație generalizate	28
2.2. O nouă funcție în teoria numerelor	32
2.3. Formule de calcul pentru $S(n)$	39
2.4. Legături între funcția S și unele funcții numerice clasice	46
2.5. Funcția S ca funcție sumatoare	54
Capitolul 3	
Generalizări ale funcției S	
3.1. Prelungirea funcției S la mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale	67
3.2. Funcții numerice inspirate din definiția funcției Smarandache	75
3.3 Funcții Smarandache de tipul unu, doi, și trei	80

p_2	r_2	p_1	r_1	$n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}$	$F_S^d(n)$	Dacă $F_S^d(n)=n$, atunci
2	1	3	$1 \leq r_1 \leq 3$	$2 \cdot 3^{r_1}$	$2+3r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	5	$1 \leq r_1 \leq 2$	$2 \cdot 5^{r_1}$	$2+5r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	$p_1 \geq 7$	1	$2 p_1$	$2+2 p_1$	$0 = 2$
2	2	3	2	36	34	$34 = 36$
2	2	$p_1 \geq 5$	1	$4 p_1$	$3 p_1 + 6$	$p_1 = 6$
3	1	2	$2 \leq r_1 \leq 5$	$3 \cdot 2^{r_1}$	$2r_1^2 - 2r_1 + 12$	$r_1 = 3$
3	1	$p_1 \geq 5$	1	$3 p_1$	$2 p_1 + 3$	$p_1 = 3$
3	1	2	3	40	30	$30 = 40$